



**T.C. İSTANBUL T CARET
ÜNİVERSİTESİ**

FEN B LİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SABİT NOKTA İTERASYON ALGORİTMALARI VE
UYGULAMALARI: YAKINSAKLIK VE KARARLILIK ANALİZİ**

Ruken ÇELİK

**Danışman
Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK**

**İkinci Tez Danışmanı
Doç. Dr. Faik GÜRSOY**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL - 2023**

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ruken ÇELİK tarafından hazırlanan "**Sabit Nokta İterasyon Algoritmaları ve Uygulamaları: Yakınsaklık ve Kararlılık Analizi**" adlı tez çalışması 03/02/2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK İstanbul Ticaret Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Murat KİRİŞÇİ İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Yusuf ZEREN Yıldız Teknik Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Özgür YILDIRIM Yıldız Teknik Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Gülistan İSKENDEROĞLU İstanbul Ticaret Üniversitesi	

Onay Tarihi : 07.03.2023

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünün 07.03.2023 tarih ve 2023/378 numaralı Yönetim Kurulu Kararının 9. maddesi gereğince, ders yüklerini ve tez yükümlülüğünü yerine getirdiği belirlenen "Ruken ÇELİK" adlı öğrencinin mezun olmasına oy birliği ile karar verilmiştir.

Prof. Dr. Doğan KAYA
Enstitü Müdürü

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

07.03.2023

Ruken ÇELİK

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	2
3. TEMEL BİLGİLER	4
3.1. Fonksiyonel Analizin Bazı Tanım ve Kavramları	4
3.2. Sabit Nokta Teori ile İlgili Bazı Tanım ve Kavramlar	8
4. BAZI İTERASYON ALGORİTMALARI	17
5. BAZI SABİT NOKTA İTERASYON DİZİLERİNİN ANALİZİ	25
5.1. K^* ve M - İterasyon Algoritmalarının Yakınsaklıkları	25
5.2. K^* İterasyon Algoritmasına İlişkin Yakınsaklık Hızı Karşılaştırması	29
5.3. K^* ve M - İterasyon Algoritmalarının Kararlılıkları	34
5.4. K^* ve M - İterasyon Algoritmalarının Veri Bağılıkları	40
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	59

ÖZET

Doktora Tezi

SABİT NOKTA İTERASYON ALGORİTMALARI VE UYGULAMALARI: YAKINSAKLIK VE KARARLILIK ANALİZİ

Ruken ÇELİK

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
İkinci Tez Danışmanı: Doç. Dr. Faik GÜRSOY
2023, 59 sayfa

Bu tez çalışmasında, Yu vd. (2021) ve Şahin (2019) tarafından sırasıyla reel normlu uzaylarda ve hiperbolik uzaylarda bazı sabit nokta iterasyon algoritmalarının yakınsaklık, kararlılık ve zayıf w^2 – kararlılıklarına ilişkin elde edilen sonuçlar yeniden ele alınarak geliştirilmiştir. Ayrıca, her iki çalışmada incelenen dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının veri bağılıklarına ilişkin sonuçlar sunulmuş ve bu sonuçlara ilişkin bulgularımız sayısal örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Büzülme ve büzülme tipli dönüşümler, kararlılık, K^* ve M -iterasyon algoritmaları, sabit nokta, sabit noktaların veri bağılılığı, yakınsaklık, zayıf w^2 –kararlılık.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

FIXED POINTS ITERATION ALGORITHMS AND AND ITS APPLICATIONS: ANALYSIS OF CONVERGENCE AND STABILITY

Ruken ÇELİK

Istanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Faik GÜRSOY
2023, 59 pages

In this thesis, the results obtained by Yu et al. (2021) and Şahin (2019) regarding the convergence, stability and weak w^2 - stability of some fixed point iteration algorithms in real normed spaces and hyperbolic spaces have been reconsidered and developed. In addition, the results regarding the data dependencies of the fixed points of the transformation classes examined in both studies are presented. Our findings are supported by various numerical examples.

Keywords: Contraction and contraction like operator, convergence, data dependencies of fixed points, fixed point, K^* and M iteration algorithm, stability, weak w^2 -stability.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmam sırasında bana yol gösteren, emek ve dayanışmasını esirgemeyen, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım tez danışmanım sayın Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK hocama teşekkür ediyorum.

Tezimin araştırma, geliştirme ve uygulama aşamalarına katkı sunan, emek veren, mesai harcayan sayın Doç. Dr. Faik GÜRSOY hocama teşekkür ediyorum.

Tez İzleme komitemde yer alarak değerli görüşleri ile araştırmamın şekillenmesini sağlayan sayın Prof. Dr. Murat KİRİŞÇİ ve sayın Prof. Dr. Yusuf ZEREN hocalarıma teşekkür ediyorum.

Tez çalışmamın olgunlaşma sürecinde yardımlarını esirgemeyen başta enstitü emektarı Göksel KIBIŞ olmak üzere İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü çalışanlarına, ayrıca desteklerini sunan Dr. Öğretim Üyesi Gülistan İSKENDEROĞLU' na teşekkür ediyorum.

Doktora tez çalışmam boyunca bana sabır gösteren ve manevi desteğini esirgemeyen, güvenlerini ve inançlarını her daim hissettiren sevgili aileme çok teşekkür ediyorum.

Ruken ÇELİK
İSTANBUL, 2023

ŞEKİLLER

	Sayfa
Şekil 5.1. Yarı kesin büzülebilir dönüşümün yakınsaklık hareketi.....	51
Şekil 5.2. Örnek 5.1 için farklı iterasyon algoritmalarının yakınsaklık hareketi.....	52



ÇİZELGELER

	Sayfa
Çizelge 5.1. Farklı iterasyon algoritmalarının yakınsaklık hız hareketleri.....	35
Çizelge 5.2. $\tilde{T}$ iterasyon algoritmasının yakınsaklık hareketleri.....	45



SİMGELER VE KISALTMALAR

(A, ρ)	Metrik uzay
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
F_M	M dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
IF, IK	Cisim ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$)
$M : A \rightarrow B$	A kümesinden B kümesine tanımlı M dönüşümü
$(N, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\rho : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$	A kümesi üzerinde tanımlı metrik fonksiyonu
$\ \cdot\ : N \rightarrow F$	N üzerinde tanımlı norm fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; tezin amacı, kapsamı ve yapılan çalışmalar özetlenmiştir. İkinci bölümde; sabit nokta ve iterasyon algoritmaları ile ilgili literatür verilmiştir. Üçüncü bölümde; fonksiyonel analiz ve sabit nokta teori ile ilgili temel tanım, kavram ve örneklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde; sabit nokta iterasyon algoritmaları ile ilgili tanımlara yer verilmiş olup bu iterasyon algoritmaları arasındaki ilişkilere değinilmiştir. Beşinci bölümde; iterasyon algoritmalarının yakınsaklık hızları, kararlılık ve sabit noktaların veri bağılılığı sonuçları ile ilgili literatür verilmiş olup K^* iterasyon algoritması ve M - iterasyon algoritmasının yakınsaklık, yakınsaklık hızı, kararlılık ve veri bağılılığı sonuçları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar nümerik örnekler ile desteklenmiştir. Altıncı bölümde; sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

“Sabit Nokta Teori” çalışmaları, 1800’ lü yıllarda başlayıp günümüze kadar uzanan ve günümüzde de birçok araştırmacı tarafından çalışılan fonksiyonel analizin çok önemli bir alanıdır. Sabit nokta teorisi analiz, topoloji ve geometrinin önemli bir karışımıdır. Matematikte sabit nokta teorisi, ilk aşamada adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını, tekliğini ve bir integral denklemin çözümünün varlığını göstermek amacıyla inşa edilmiştir. Çeşitli bilim dallarında karşılaşılan çok sayıdaki lineer ve bilhassa lineer olmayan denklem/denklem sistemleri sabit nokta denklemlerine/denklem sistemlerine dönüştürülebildiklerinden dolayı, sabit nokta teori yöntemleri bu tür problemlerin çözümlerinde etkili bir şekilde kullanılan önemli matematiksel araçlar haline gelmiştir.

Sabit nokta teori çalışmaları çok yönlü olmakla birlikte, iterasyon algoritmalarının ve dönüşüm sınıflarının çeşitli özelliklerinin incelenmesine yönelik yapılan çalışmalar, oldukça dinamik olan bu çalışma sahasında önemli bir yere sahiptir. Matematiksel fizik, fonksiyonlar teorisi, diferansiyel ve integral denklemler, optimizasyon problemleri, kontrol problemleri, varyasyonel problemler, yaklaşım teorisi, bilgi kuramı, istatistiksel fizik ve oyun teorisi gibi alanlardaki çoğu problem, $M : A \rightarrow A$ şeklindeki bir doğrusal olmayan operatörün sabit noktasının bulunması veya buna denk olarak; G , uygun bir A uzayı üzerinde tanımlı bir doğrusal olmayan dönüşüm olmak üzere

$$G(a) = a - M(a) = 0 \quad (2.1)$$

formundaki bir operatör denklemin sıfırlarının bulunması olarak formüle edilebilir. Literatürde, (2.1) denklemindeki M dönüşümünün contraction (büzülme) olması durumu yoğun bir şekilde incelenmiştir. Contraction (büzülme) dönüşümler düzgün sürekli dönüşümlerdir. Oysa ki, bilimin çok farklı sahalarında ortaya çıkan problemlerin modellenmesinde kullanılan dönüşümlerin büyük çoğunluğu sürekli değildir. Bu ise, çeşitli problemlerin modellenmesi ile elde edilen (2.1) formundaki sabit nokta denklemlerindeki dönüşümlerin, sürekli olan contraction (büzülme) dönüşümlerden ziyade, genellikle süreksiz olan ve daha genel contractive (büzülebilir) şartları sağlayan farklı türden dönüşüm sınıflarına ait operatörlerden oluşacağı gerçeğini ortaya koymaktadır. Bu tür problemlerin analitik yöntemlerle çözülmesi her

zaman mümkün olmadığından, iterasyon algoritmaları, (2.1) ile verilen problemlerin çözümlerini elde etmede kullanılan çok önemli matematiksel araçlar olmuştur ve bu nedenle (2.1) ile verilen problemlerin çözümlerine uygun yaklaşımda bulunmak amacıyla çok sayıda farklı iterasyon algoritması tanımlanmıştır.

İterasyon algoritmaları, çözümleri analitik yöntemlerle elde edilemeyen doğrusal olmayan problemlerin çözümlerine yaklaşımda kullanılan en güçlü araçlardır. Bu nedenle son yıllarda, bilimin ve mühendisliğin çeşitli dallarında ortaya çıkan doğrusal olmayan problemleri çözmek için daha hızlı ve daha etkili iterasyon yöntemleri geliştirmeye yoğun bir ilgi oluşmuştur.

Sabit nokta iterasyon algoritma çalışmaları Picard iterasyonu (Picard, 1890) ile başlar. Picard iterasyonu daha çok contraction (büzülme) tipi dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşırken kullanılabilir. Nonexpansive (genişlemeyen) dönüşümler için Mann (Mann, 1953), Krasnoselskij (Krasnoselskij, 1955), Noor (Noor, 2000) ve Ishikawa (Ishikawa, 1974) iterasyon yöntemleri tanımlanmıştır. Bu iterasyon algoritmaları ve bu algoritmaların çeşitli modifikasyonları çok sayıda araştırmacı tarafından farklı amaçlar ve uygulama alanları doğrultusunda detaylı olarak incelenmiştir.

3. TEMEL BİLGİLER

Tezin bu bölümünde, çalışma boyunca kullanılacak olan hem fonksiyonel analiz hem de sabit nokta teori ile ilgili bazı temel kavramlar ve gerçekler sunularak örneklendirilmiştir.

3.1. Fonksiyonel Analizin Bazı Tanım ve Kavramları

Tanım 3.1. (Metrik uzay)

Y boş olmayan bir küme ve $\rho : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $p, r, s \in Y$ için;

- $(M_1) \quad \rho(r, s) \geq 0$ (pozitif tanımlılık)
- $(M_2) \quad \rho(r, s) = 0 \Leftrightarrow r = s$
- $(M_3) \quad \rho(r, s) = \rho(s, r)$ (simetriklik)
- $(M_4) \quad \rho(r, s) \leq \rho(r, p) + \rho(p, s)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan ρ fonksiyonuna Y üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (Y, ρ) ikilisine de bir metrik uzay denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.2. (Yakınsak dizi)

$Y = (Y, \rho)$ bir metrik uzay ve $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda, $\rho(s_n, s) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $s \in Y$ noktasına yakınsaktır denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.3. (Cauchy dizisi)

$Y = (Y, \rho)$ bir metrik uzay ve $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda, $\rho(s_n, s_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ varsa, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.4. (Tam metrik uzay)

$Y = (Y, \rho)$ bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, Y uzayına tam metrik uzay denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.5. (Kompakt metrik uzay)

$Y = (Y, \rho)$ bir metrik uzay olsun. (Y, ρ) uzayındaki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse; (Y, ρ) uzayına kompakt metrik uzay denir (Brown ve Page, 1970).

Tanım 3.6. (Lineer uzay)

L boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+$: $L \times L \rightarrow L$ ve $\bullet$: $K \times L \rightarrow L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L 'ye K cismi üzerinde vektör uzayı (lineer uzay) denir:

(A) L kümesi $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

1. Her $r, s \in L$ için $r + s \in L$
2. Her $r, s, t \in L$ için $r + (s + t) = (r + s) + t$
3. Her $r \in L$ için $r + \theta = \theta + r = r$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,
4. Her $r \in L$ için $r + (-r) = (-r) + r = \theta$ olacak şekilde $-r \in L$ vardır,
5. Her $r, s \in L$ için $r + s = s + r$

(B) $r, s \in L$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

1. $\alpha \cdot r \in L$
2. $\alpha \cdot (r + s) = \alpha \cdot r + \alpha \cdot s$
3. $(\alpha + \beta) \cdot r = \alpha \cdot r + \beta \cdot r$
4. $(\alpha \cdot \beta) \cdot r = \alpha \cdot (\beta \cdot r)$
5. $1 \cdot r = r$ dir (burada 1, K 'nın birim elemanıdır).

Lineer uzay tanımında $K = \mathbb{R}$ ise L ye reel vektör uzay, $K = \mathbb{C}$ ise, L 'ye kompleks vektör uzay adı verilir (Kreyzig, 1989).

Tanım 3.7. (Konveks küme)

L bir reel vektör uzayı ve $A \subseteq L$ olsun. Her $r, s \in A$ için

$$B = \{t \in L : t = \alpha r + (1 - \alpha)s, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir (Brown ve Page, 1970).

Tanım 3.8. (Normlu uzay)

N bir lineer uzay ve $K = \mathbb{R}$ cismi olmak üzere, $\|\cdot\| : N \rightarrow K$ fonksiyonunun r noktasındaki değeri $\|r\|$ ile verilsin. Bu fonksiyon

$$(N_1) \quad \|r\| = 0 \Leftrightarrow r = \theta$$

$$(N_2) \quad \text{Her } \alpha \in K \text{ ve her } r \in N \text{ için } \|\alpha \cdot r\| = |\alpha| \cdot \|r\|$$

$$(N_3) \quad \text{Her } r, s \in N \text{ için } \|r + s\| \leq \|r\| + \|s\|$$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna N üzerinde bir norm ve $(N, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Moore ve Cloud, 2007).

Tanım 3.9. (Banach uzayı)

N bir normlu vektör uzay olsun. N uzayı $d(r, s) = \|r - s\|$ ($r, s \in N$) norm metriğine göre tam ise Banach uzayı denir (Curtain ve Pritchard, 1977).

Tanım 3.10. (Lineer operatör)

L ve L' aynı bir IF cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $M : L \rightarrow L'$ operatörü, $\alpha \in F$ olmak üzere;

$$\begin{cases} \text{(i)} & M(r + s) = M(r) + M(s) \\ \text{(ii)} & M(\alpha r) = \alpha M(r) \end{cases}$$

şartlarını sağlıyorsa M operatörüne lineer operatör denir (Kreyzig, 1989).

Tanım 3.11. (Hiperbolik Uzay)

(Y, ρ) bir metrik uzay ve $W : Y \times Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda, her $r, s, t, w \in Y$ ve $\alpha, \beta \in [0, 1]$ için,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(W1)} \quad \rho(t, W(r, s, \alpha)) \leq \alpha\rho(t, r) + (1 - \alpha)\rho(t, s), \\ \text{(W2)} \quad \rho(W(r, s, \alpha), W(r, s, \beta)) = |\alpha - \beta|\rho(r, s), \\ \text{(W3)} \quad W(r, s, \alpha) = W(r, s, 1 - \alpha), \\ \text{(W4)} \quad \rho(W(r, t, \alpha), W(s, w, \alpha)) \leq \alpha\rho(r, s) + (1 - \alpha)\rho(t, w) \end{array} \right.$$

şartları sağlanıyorsa, (Y, ρ, W) üçlüsüne bir Hiperbolik uzay denir (Osilike, 1996).

Tanım 3.12. (Konveks metrik uzay)

(Y, ρ) bir metrik uzay ve $W : Y \times Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, her $r, s, t \in Y$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$\rho(t, W(r, s, \alpha)) \leq \alpha\rho(t, r) + (1 - \alpha)\rho(t, s)$$

şartı sağlanıyorsa (Y, ρ, W) üçlüsüne konveks metrik uzay denir (Takahashi, 1970).

Not 1. A kümesi bir Y hiperbolik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer her $r, s \in A$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için $W(r, s, \alpha) \in A$ oluyorsa, bu durumda A konveks bir kümedir.

Not 2. Her $r, s \in A$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$\rho(s, W(r, s, \alpha)) = \alpha\rho(r, s) \quad \text{ve} \quad \rho(r, W(r, s, \alpha)) = (1 - \alpha)\rho(r, s)$$

dir ((Kohlenbach, 2004), Önerme 1.2]). Bunların bir sonucu olarak,

$$W(r, s, 1) = r \quad \text{ve} \quad W(r, s, 0) = s$$

ifadeleri elde edilir.

3.2. Sabit Nokta Teori ile İlgili Bazı Tanım ve Kavramlar

Tanım 3.13. A boştan farklı bir küme ve $M : A \rightarrow A$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer

$$Ma = a$$

olacak şekilde bir $a \in A$ varsa, bu a noktasına M dönüşümünün sabit noktası denir. M dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi F_M , $F(M)$ veya $Fix(M)$ ile gösterilir (Berinde, 2007).

Not 3. $A \neq \emptyset$ bir küme ve $M : A \rightarrow A$ dönüşümü verilsin. Verilen herhangi bir $a \in A$ için $M^0(a) = a$, $M^1(a) = M(M^0(a))$, $\dots$, $M^{n+1}(a) = M(M^n(a))$ olarak yazılabilir. $M^n(a)$ gösterimine M dönüşümü altında a nın n . yinelemesi denir.

Not 4. M dönüşümünün sabit noktalarının kümesi aşağıdaki iki özelliğe sahiptir:

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F_M \subset F_{M^n}$,
- 2) $F_{M^n} = \{a\}$ ise $\exists n \in \mathbb{N}$ için $F_M = a$ dır. Fakat tersi doğru değildir.

Şimdi ise sabit nokta teoride kullanılan önemli dönüşümlerden bahsedilip, bu dönüşümlerle ilgili bazı örnekler verilecektir.

Tanım 3.14. (Lipschitzian dönüşümü)

(A, ρ) bir metrik uzay ve $M : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $\forall r, s \in A$ için,

$$\rho(Mr, Ms) \leq k\rho(r, s) \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa, M dönüşümüne Lipschitzian dönüşümü denir (Berinde, 2007).

Tanım 3.15. (Büzülme dönüşümü)

(A, ρ) bir metrik uzay ve $M : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $\forall r, s \in A$ için,

$$\rho(Mr, Ms) \leq a\rho(r, s) \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir $a \in [0, 1)$ sabiti varsa, M dönüşümüne büzülme dönüşümü denir (Berinde, 2007).

Örnek 3.1. $A = [0, \infty)$, $\rho(r, s) = |r - s|$ olsun ve $M(r) = 2 + \frac{1}{4} \arctan r$ ile tanımlı $M : A \rightarrow A$ dönüşümünü gözönünde bulundurulsun. Her $r, s \in A$ için,

$$\begin{aligned} \rho(Mr, Ms) &= \left| 2 + \frac{1}{4} \arctan r - \left(2 + \frac{1}{4} \arctan s \right) \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \arctan r - \arctan s \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \arctan \frac{r - s}{1 + rs} \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \left| \frac{r - s}{1 + rs} \right| \\ &\leq \frac{1}{4} |r - s| = \frac{1}{4} \rho(r, s) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde ediliir. Bu durumda $\lambda = \frac{1}{4}$ alınması veya herhangi bir $\lambda \in [\frac{1}{4}, 1)$ seçimi için M dönüşümünün büzülme dönüşümü olduğu elde edilir (Gürsoy, 2014).

Örnek 3.2. Ortalama Değer Teoremi (ODT), reel değerli düzgün (smooth) fonksiyonların büzülme dönüşümü olduğunun gösterilmesinde önemli bir role sahiptir. $A = \mathbb{R}$, $\rho(r, s) = |r - s|$ olsun ve $M(r) = \frac{1}{5} \sin 2r$ ile tanımlı $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ele alınsın. M dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğundan ODT uygulanabilir:

$$\rho(Mr, Ms) = |Mr - Ms| = |M'(t) \cdot (r - s)| = \frac{2}{5} |\cos 2t| |r - s| \leq \frac{2}{5} |r - s|$$

olacak şekilde r ve s arasında bir t sayısı vardır. Böylece $\lambda = \frac{2}{5}$ olarak alınması veya herhangi bir $\lambda \in [\frac{2}{5}, 1)$ seçimi için M dönüşümünün büzülme dönüşümü olduğu elde edilir (Gürsoy, 2014).

Teorem 3.1. (Banach Büzölme Prensibi) A bir tam metrik uzay ve $M : A \rightarrow A$ dönüşümü (3.2) şartını sağlayan bir büzölme dönüşümü olsun. Bu durumda;

i) M, A uzayında bir tek p sabit noktasına sahiptir;

ii) Herhangi bir $s_0 \in A$ için

$$s_n = Ms_{n-1} = M^n s_0, n = 0, 1, 2, \dots$$

ile tanımlı Picard iterasyon algoritması tarafından üretilen $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi p ye yakınsar (Banach, 1992).

Banach Büzölme Prensibi, sabit noktanın var olduğunu göstermekle birlikte, keyfi bir başlangıç değeri için bu sabit noktanın yaklaşık olarak hesaplanmasını da sağlar.

Örnek 3.3. $A = [a, b]$, $\rho(r, s) = |r - s|$ ve $M : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Eğer M , $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $r \in (a, b)$ için

$$|M'(r)| \leq k < 1$$

ise, M nin A da bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden $r, s \in [a, b]$ için

$$|Mr - Ms| = |M'(t).(r - s)| \leq k.|r - s|$$

olacak şekilde bir $t \in (r, s)$ vardır. Böylece Banach Büzölme Prensibi gereği M nin bir tek sabit noktası vardır (Gürsoy, 2014).

Tanım 3.16. (Kesin büzülebilir dönüşüm)

(A, ρ) bir metrik uzay ve $M : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $r \neq s$ olacak şekilde $\forall r, s \in A$ için,

$$\rho(Mr, Ms) < \rho(r, s) \tag{3.3}$$

ise M dönüşümüne kesin büzülebilir dönüşüm denir (Berinde, 2007).

Örnek 3.4. $A = \mathbb{R}$, $\rho(r, s) = |r - s|$ olsun ve $M(r) = \ln(e^r + 2)$ tanımlı $M : R \rightarrow R$ dönüşümü göz önüne alınsın. M dönüşümü (3.3) şartını sağlar: ODT' den dolayı herhangi $r, s \in A$ çifti için

$$|M(r) - M(s)| = |M'(t)||r - s| = \left| \frac{e^t}{2+e^t} \right| |r - s| < |r - s|$$

olacak şekilde bir $t \in (r, s)$ sayısı mevcuttur. Burada M dönüşümünün bir büzülme dönüşümü olmadığı görülür. Ancak $r_1 = 0$ başlangıç noktası ile $r_2 = \ln(e^0 + 2) = \ln 3$, $r_3 = \ln(e^{\ln 3} + 2) = \ln 5$, ..., $r_n = \ln(n + 1)$ iterasyon dizisi elde edilir. Bu dizi sınırsız olduğundan bir Cauchy dizisi olamaz (Gürsoy, 2014).

Tanım 3.17. (Genişlemeyen dönüşüm)

(A, ρ) bir metrik uzay ve $M : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. $\forall r, s \in A$ için,

$$\rho(Mr, Ms) \leq \rho(r, s) \quad (3.4)$$

ise M dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm denir (Berinde, 2007).

Tanım 3.18. (Yarı Kesin Büzülebilir Dönüşüm)

$(A, \|\cdot\|)$ reel değerli bir normlu uzay, $C \subset A$ ve $M : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $s \in A$, $\delta \in [0, 1)$ ve $Mp = p$ olmak üzere

$$\|Ms - p\| \leq \delta \|s - p\| \quad (3.5)$$

şartını sağlayan dönüşümlere yarı kesin büzülebilir dönüşüm denir (Scherzer, 1995).

Bir sabit noktaya sahip olan her büzülme dönüşümü, bir yarı kesin büzülebilir dönüşümdür. Ancak, bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 3.5. $A = l_\infty$ ve $B = \{s \in l_\infty : \|s\| \leq 1\}$ olsun. $s = (s_1, s_2, s_3, \dots) \in l_\infty$ için $M : A \rightarrow B \subseteq A$

$$Ms = \begin{cases} \frac{11}{12}(0, s_1^2, s_2^2, s_3^2, \dots), & \|s\|_\infty \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{11}{12\|s\|_\infty^2}(0, s_1^2, s_2^2, s_3^2, \dots), & \|s\|_\infty > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın (Chidume ve Olaleru, 2014).

Bu durumda, M dönüşümünün tek sabit noktası $p = 0$ dır ve bu dönüşüm her $s \in l_\infty$ için ve $\delta = \frac{11}{12} \in [0, 1)$ sayısı için (3.5) şartını sağlar. Diğer taraftan, $s = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \dots)$ ve $t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots)$ için,

$$\|s - t\|_\infty = \frac{1}{4}, \quad \|Ms - Mt\|_\infty = \frac{11}{12} \left\| 0, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \dots \right\| = \frac{55}{192}$$

elde edilir. Şimdi, her $s, t \in l_\infty$ için $\|Ms - Mt\|_\infty \leq \delta \|s - t\|_\infty$ olacak şekilde bir $\delta \in [0, 1)$ sayısının mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\frac{55}{192} \leq \delta \frac{1}{4}$ olup, $1 < \frac{220}{192} \leq \delta$ olduğu elde edilir ki, bu da $\delta \in [0, 1)$ olması ile çelişir. Bu nedenle, M dönüşümü bir büzülme dönüşümü değildir. Sonuç olarak, (3.5) şartını sağlayan yarı kesin büzülebilir dönüşüm sınıfı, (3.2) şartını sağlayan büzülme dönüşümü sınıfını içermektedir.

Tanım 3.19. (Büzülebilir tip dönüşüm)

(A, ρ) bir metrik uzay, C bu uzayın bir altkümesi ve $M : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun.

$\forall r, s \in C, \exists \alpha \in [0, 1)$ ve $L \geq 0$ için

$$\rho(Mr, Ms) \leq \alpha \rho(r, s) + L \rho(r, Mr) \quad (3.6)$$

şartını sağlayan dönüşümlere büzülebilir tip dönüşümler denir (Osilike, 1995).

Tanım 3.20. (M - Kararlılık)

(A, ρ) bir metrik uzay, $M : A \rightarrow A$ bir dönüşüm ve $\{s_n\}_{n=0}^\infty \subset A$ dizisi, s_0 bir başlangıç yaklaşımı ve f bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} s_0 &\in A \\ s_{n+1} &= f(M, s_n), \forall n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

algoritması tarafından üretilen bir iterasyon dizisi olsun. $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ dizisinin $p \in F(M) = \{p : Mp = p\}$ sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{t_n\}_{n=0}^\infty \subset A$ keyfi bir dizi olmak üzere, $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ iterasyon dizisinin M' ye göre kararlı veya kısaca M -kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(t_{n+1}, f(M, t_n)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = p$$

olmasıdır (Harder ve Hicks, 1988).

Somut uygulamalarda, (3.7) tarafından üretilen $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi hesaplanırken genellikle aşağıdaki işlem adımları izlenir:

- (1) $s_0 \in A$ başlangıç yaklaşımı seçilir,
- (2) $s_1 = f(M, s_0)$ değeri hesaplanır, fakat hesaplamalar sırasında meydana gelen çeşitli hatalar (yuvarlama hataları, fonksiyonların sayısal yaklaşımları, türevler veya integraller vb.) nedeniyle, s_1 ' in tam değeri elde edilemez, ancak s_1 yerine s_1 ' e yeterince yakın olan farklı bir t_1 değeri elde edilir, yani $t_1 \approx s_1$ olacak şekilde bir t_1 değeri elde edilir. Sonuç olarak $s_2 = f(M, s_1)$ ' nin teorik değeri hesaplamaya çalışılırken, bunun yerine, s_2 gerçekte

$$s_2 = f(M, t_1)$$

olarak hesaplanır ve böylece gerçekte, s_2 ' nin teorik değeri yerine, başka bir t_2 değeri hesaplanmış olur. Yine, elde edilen bu t_2 değeri, teorik s_2 değerine yeterince yakındır, yani, $t_2 \approx s_2$ dir. Bu hesaplama süreci bu şekilde devam edeceğinden, (3.7) tarafından üretilen teorik $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ iteratif dizisi yerine, pratikte, bu dizinin bir yaklaşık dizisi olan $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi elde edilir.

Dolayısıyla, (3.7) ile verilen sabit nokta iterasyon algoritmasının, ancak ve ancak, her bir adımda s_n ' e yeterince yakın olan $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ yaklaşık dizisinin M ' nin sabit noktasına yakınsak olması durumunda sayısal kararlı olduğu düşünülecektir. Yukarıda bahsedilen nedenlerle, kararlılık tanımında yer alan $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin keyfi bir dizi olarak alınması doğal bir olgu değildir. Nümerik bir bakış açısıyla, $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi bir anlamda $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ' in bir yaklaşık dizisi olmalıdır.

(Berinde, 2007)' de yaklaşık dizi kavramı ele alınarak, zayıf kararlılık adı verilen daha zayıf ve daha doğal olan bir kararlılık kavramı tanıtılmıştır. Dolayısıyla, kararlı olan herhangi bir iterasyon algoritması aynı zamanda zayıf kararlı olacaktır, ancak bunun tersi genellikle doğru değildir.

Tanım 3.21. (Yaklaşık diziler)

(A, ρ) bir metrik uzay olsun ve $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ dizisi verilsin. Herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\rho(s_n, t_n) \leq \eta, \forall n \geq k$$

olacak şekilde bir $\eta = \eta(k)$ sayısı mevcut ise, bu durumda, $\{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ dizisine

$\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ dizisinin bir yaklaşık dizisi denir (Bridson ve Haefliger, 1999).

Lemma 3.2. (A, ρ) bir metrik uzay olsun ve $\{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ dizisinin, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ dizisinin bir yaklaşık dizisi olması için gerek ve yeter şart;

$$\rho(s_n, t_n) \leq \eta_n, \quad \forall n \geq k \quad (\text{sabit})$$

olacak şekilde bir $\eta \geq 0$ sayısına yakınsak olan, pozitif sayıların azalan bir $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin mevcut olmasıdır (Berinde, 2007).

Tanım 3.22. (Zayıf M - kararlılık)

(A, ρ) bir metrik uzay ve $M : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. s_0 bir başlangıç yaklaşımı ve f bir fonksiyon olmak üzere, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ dizisi (3.7) tarafından üretilen bir iterasyon dizisi olsun. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $p \in F(M) = \{p : Mp = p\}$ sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ' in herhangi bir $\{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ yaklaşık dizisi için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(t_{n+1}, f(M, t_n)) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = p$$

oluyorsa, bu durumda, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisinin M' ye göre zayıf kararlıdır veya kısaca zayıf M - kararlıdır denir (Berinde, 2007).

2010 yılında, Ioana Timiş tarafından zayıf kararlılık kavramı, Tanım 3.21' deki yaklaşık dizi tanımı yerine denk dizi tanımı kullanmak suretiyle daha da geliştirilmiştir ve böylece zayıf w^2 -kararlılık olarak adlandırılan yeni bir kararlılık kavramı tanıtılmıştır.

Tanım 3.23. (Denk diziler)

(A, ρ) bir metrik uzay olsun ve $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri A uzayında iki dizi olsun. Eğer

$$n \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad \rho(s_n, t_n) \rightarrow 0$$

ise bu durumda $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerine birbirlerinin denk dizileri denir (Berinde, 2007).

Birbirlerinin denk dizileri olan diziler, aynı zamanda birbirlerinin yaklaşık dizileridirler. Ancak, aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 3.6. $A = \mathbb{R}$ olsun ve $\{r_n\}_{n=0}^{\infty} = \{n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} = \{n + \frac{1}{n}\}_{n=0}^{\infty}$ olarak tanımlansın. $n \rightarrow \infty$ iken

$$\rho(r_n, s_n) = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

olduğundan, $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri birbirlerinin denk dizileridir. $\{r_n\}_{n=0}^{\infty} = \{n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir yaklaşık dizisi $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} = \{n + \frac{n}{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ olarak alınsın. Bu durumda, $n \rightarrow \infty$ iken

$$\rho(r_n, s_n) = \left| \frac{n}{2n+1} \right| = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} > 0$$

elde edilir.

Tanım 3.24. (Zayıf w^2 -kararlılık)

(A, ρ) bir metrik uzay ve $M : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. s_0 bir başlangıç yaklaşımı ve f bir fonksiyon olmak üzere, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ dizisi (3.7) tarafından üretilen bir iteratif dizi olsun. $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $p \in F(M) = \{p : Mp = p\}$ sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin herhangi bir $\{t_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ denk dizisi için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(t_{n+1}, f(M, t_n)) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = p$$

oluyorsa, bu durumda $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi M' ye göre zayıf w^2 -kararlıdır denir (Harder ve Hicks, 1988).

Tanım 3.25. (Yaklaşık operatörler)

(A, ρ) bir metrik uzay, $C \subset A$, $M : C \rightarrow C$ ve $\tilde{M} : C \rightarrow C$ iki operatör olsun. Her $s \in A$ ve sabit bir $\epsilon > 0$ için

$$\rho(Ms, \tilde{M}s) \leq \epsilon$$

oluyorsa, M ve $\tilde{M}$ operatörlerine birbirlerinin yaklaşık operatörleri denir (Berinde, 2007).

Lemma 3.3. α_n negatif olmayan bir dizi, her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq 0$, $r_n \in (0, 1)$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \infty$ olsun. Eğer her $n \geq n_0$ için

$$\alpha_{n+1} \leq (1 - r_n)\alpha_n + r_n t_n \quad (3.8)$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcut ise, bu durumda

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \alpha_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup t_n$$

dir (Şoltuz ve Grosan, 2008).



4. BAZI İTERASYON ALGORİTMALARI

Sabit nokta iterasyon algoritmalarına ilişkin çalışmalar Picard iterasyonu (Picard, 1890) ile başlar. Picard iterasyonu daha çok büzülme tipi dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşırken kullanılabilir. Picard iterasyonunun $Tx = 1 - x$ ile verilen bir genişlemeyen dönüşümün sabit noktasına yakınsamasındaki başarısızlığı nedeniyle, genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımda bulunabilmek amacıyla Mann, Krasnoselskij ve Ishikawa iterasyon algoritmaları tanımlamıştır. (Noor, 2000)' de bu çalışmalardan esinlenilerek, Noor iterasyon algoritması tanımlanmış ve bu algoritma varyasyonel eşitsizliklerin çözümünde başarılı bir şekilde kullanılmıştır. Mann iterasyon algoritmasının pseudo-contractive dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamadığı fakat Ishikawa iterasyon algoritmasının anılan sabit noktaya yakınsadığı gösterilmiştir (Chidume ve Mutangadura, 2001).

Tanım 4.26. (Picard İterasyon Algoritması)

(Y, ρ) bir metrik uzay, $A \subset Y$ kümesi Y uzayının kapalı bir alt kümesi ve $M : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $s_0 \in Y$ için,

$$s_k = M(s_{k-1}) = M^k(s_0) \quad (4.1)$$

ile verilen (s_k) iterasyon algoritmasına Picard iterasyon algoritması denir (Picard, 1890).

Tanım 4.27. (Mann İterasyon Algoritması)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $s_0 \in S$ ve $\{\mu_k^1\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ için

$$s_{k+1} = (1 - \mu_k^1)s_k + \mu_k^1 M s_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

ile verilen iterasyon algoritmasına Mann iterasyon algoritması denir (Mann, 1953).

Burada her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\mu_k^1\}_{k=0}^\infty = \mu^1(\text{sabit})$ ise Mann iterasyonu Krasnoselskij iterasyonunun algoritmasına indirgenir.

Tanım 4.28. (Krasnoselskii İterasyon Algoritması)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $s_0 \in S$ ve $\mu^1 \in [0, 1]$ için

$$s_{k+1} = (1 - \mu^1)s_k + \mu^1 Ms_k \quad (4.3)$$

ile verilen iterasyona Krasnoselskij iterasyon algoritması denir. Kolayca görülebilir ki $\mu^1 = 1$ durumunda Krasnoselskij iterasyonu Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskii, 1955).

İki adımlı Mann iterasyon algoritması olarak da adlandırılan Ishikawa iterasyon algoritması, Mann iterasyon algoritmasının pseudo-contraction dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamasındaki başarısızlığı üzerine, Mann iterasyon algoritmasının bir genelleştirilmesi ve geliştirilmesi olarak 1974 yılında Shiro Ishikawa tarafından inşa edilmiştir.

Tanım 4.29. (Ishikawa İterasyon Algoritması)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $i_0^1 \in S$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $i = 1, 2$ olmak üzere $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri alındığında;

$$\begin{cases} s_0^1 \in S \\ s_{k+1}^1 = (1 - \mu_k^1)s_k^1 + \mu_k^1 Ms_k^2 \\ s_k^2 = (1 - \mu_k^2)s_k^1 + \mu_k^2 Ms_k^1 \end{cases} \quad (4.4)$$

ile tanımlanan iterasyon algoritmasına Ishikawa iterasyon algoritması denir (Ishikawa, 1974).

Tanım 4.30. (Noor İterasyon Algoritması)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $n_0^1 \in S$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri alındığında;

$$\begin{cases} n_0^1 \in S \\ n_{k+1}^1 = (1 - \mu_k^1)n_k^1 + \mu_k^1 M n_k^2 \\ n_k^2 = (1 - \mu_k^2)n_k^1 + \mu_k^2 M n_k^3 \\ n_k^3 = (1 - \mu_k^3)n_k^1 + \mu_k^3 M n_k^1 \end{cases} \quad (4.5)$$

ile verilen iterasyon algoritmasına Noor iterasyon algoritması denir (Noor, 2000).

Burada

- (i) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^3 = 0$,
- (ii) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^2 = \mu_k^3 = 0$,
- (iii) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^2 = \mu_k^3 = 0$ ve $\mu_k^1 = \mu^1$,
- (iv) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = 1$ ve $\mu_k^2 = \mu_k^3 = 0$,
- (v) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = 1$ ve $\mu_k^3 = 0$

olması durumunda (4.5) ifadesi sırasıyla Ishikawa, Mann, Krasnoselskii, Picard ve Normal - S iterasyon algoritmalarına indirgenir.

Tanım 4.31. (S - İterasyon Algoritması)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $n_0^1 \in S$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri alındığında;

$$\begin{cases} s_0^1 \in S \\ s_{k+1}^1 = (1 - \mu_k^1)M s_k^1 + \mu_k^1 M s_k^2 \\ s_k^2 = (1 - \mu_k^2)s_k^1 + \mu_k^2 M s_k^1 \end{cases} \quad (4.6)$$

ile verilen iterasyon algoritması S - iterasyon algoritması olarak adlandırılmıştır (Agarwal vd., 2007).

Burada

(i) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = 1$ ve $\mu_k^2 = 1$,

(ii) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = 1$

olması durumunda (4.6) ifadesi sırasıyla Picard ve normal S - iterasyon algortimalarına indirgenir.

(4.6) ile verilen S - iterasyon algoritması Mann, Krasnoselskij ve Ishikawa iterasyon algortimalarından bağımsızdır ve farklı dönüşüm sınıflarının sabit noktalarına yaklaşırken bahsedilen algortimalardan daha iyi performans gösterir. Bu sebeple S - iterasyon algoritması çok sayıda araştırmacı tarafından farklı matematiksel özellikleri ve uygulama alanları incelenmek üzere yoğun bir şekilde çalışılmıştır.

2011 yılında Sahu tarafından S - iterasyon algoritması fikrinden esinlenilerek aşağıda verilen normal S - iterasyon algoritması tanımlanmıştır.

Tanım 4.32. (Normal S - İterasyon Algoritması)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $s_0^1 \in S$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $i = 1, 2, 3$ için $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri alındığında;

$$\begin{cases} s_0^1 \in S \\ s_{k+1}^1 = Ms_k^2 \\ s_k^2 = (1 - \mu_k^2)s_k^1 + \mu_k^2 Ms_k^1 \end{cases} \quad (4.7)$$

ile verilen iterasyon algoritması normal S - iterasyon algoritması olarak adlandırılmıştır (Sahu, 2011).

(Sahu, 2011)' de normal - S iterasyon algoritmasının Mann, Ishikawa, Noor ve S - iterasyon algortimalarından daha etkili ve üstün olduğu hem teorik hem de sayısal sonuçlarla gösterilmiştir. Bu özelliğinden dolayı, bu iterasyon algoritması çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiş ve farklı matematiksel yapılar çerçevesinde çeşitli özellikleri bakımından detaylıca incelenmiş ve etkili bir matematiksel araç olarak

farklı disiplinlerde ortaya çıkan çok sayıda problemin çözümüne başarılı bir şekilde uygulanmıştır.

Tanım 4.33. (*SP* ve *CR* İterasyon Algoritması)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $p_0^1, c_0^1 \in S$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $i = 1, 2, 3$ için $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri alındığında;

$$\begin{cases} p_0^1 \in S \\ p_{k+1}^1 = (1 - \mu_k^1)p_k^2 + \mu_k^1 M p_k^2 \\ p_k^2 = (1 - \mu_k^2)p_k^3 + \mu_k^2 M p_k^3 \\ p_k^3 = (1 - \mu_k^3)p_k^1 + \mu_k^3 M p_k^1 \end{cases} \quad (4.8)$$

ve

$$\begin{cases} c_0^1 \in S \\ c_{k+1}^1 = (1 - \mu_k^1)c_k^2 + \mu_k^1 M c_k^2 \\ c_k^2 = (1 - \mu_k^2)c_k^1 + \mu_k^2 M c_k^3 \\ c_k^3 = (1 - \mu_k^3)c_k^1 + \mu_k^3 M c_k^1 \end{cases} \quad (4.9)$$

sırasıyla *SP* (Phuengrattana ve Suantai, 2011) ve *CR* (Chugh ve Kumar, 2012) iterasyon algoritmaları elde edilir.

Burada

- (i) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^3 = 0$,
- (ii) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^2 = \mu_k^3 = 0$,
- (iii) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^2 = \mu_k^3 = 0$ ve $\mu_k^1 = \mu^1$,
- (iv) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = \mu^1$ ve $\mu_k^2 = \mu_k^3 = 0$
- (v) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = \mu^1$ ve $\mu_k^3 = 0$
- (vi) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = 1$

olması durumunda (4.8) iterasyon algoritmasından sırasıyla Thianwan, Mann, Krasnoselskij, Picard, normal - *S*, *SP** iterasyon algoritması elde edilir. Yine

- (i) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = \mu_k^3 = 0$,
- (ii) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = 0$,

(iii) her $k \in \mathbb{N}$ için $\mu_k^1 = 0$ ve $\mu_k^2 = 1$

olması durumunda (4.9) iterasyon algoritmasından sırasıyla Picard, S ve normal-S iterasyon algoritması elde edilir (Kadıoğlu ve Yıldırım, 2014).

Tanım 4.34. (*TTP İterasyon Algoritması*)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $p_0^1 \in S$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $i = 1, 2, 3$ için $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri alındığında;

$$\begin{cases} p_0^1 \in S \\ p_{k+1}^1 = (1 - \mu_k^1)Mp_k^1 + \mu_k^1Mp_k^2 \\ p_k^2 = (1 - \mu_k^2)p_k^3 + \mu_k^2Mp_k^3 \\ p_k^3 = (1 - \mu_k^3)p_k^1 + \mu_k^3Mp_k^1 \end{cases} \quad (4.10)$$

ile verilen iterasyon algoritmasına *TTP* iterasyon algoritması denir (Thakur vd., 2014).

(Thakur vd., 2014) çalışmasında (4.10) ile tanımlanan iterasyon algoritmasının büzülme dönüşümlerinin sabit noktasına Picard, Mann, Ishikawa ve S - iterasyonu da dahil diğer birçok iterasyon algoritmasından daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir.

(Ullah ve Arshad, 2018) çalışmasında büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarına S ve Picard - S iterasyon algoritmalarından daha hızlı yakınsamasını sağlamak amacıyla M - iterasyon algoritması olarak adlandırılan iterasyon algoritması aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 4.35. (*M - İterasyon Algoritması*)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $s_0^1 \in S$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\mu_k^1\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri alındığında;

$$\begin{cases} s_0^1 \in S \\ s_{k+1}^1 = Ms_k^2 \\ s_k^2 = Ms_k^3 \\ s_k^3 = (1 - \mu_k^1)s_k^1 + \mu_k^1 Ms_k^1 \end{cases} \quad (4.11)$$

ile verilen iterasyon algoritmasına M - iterasyon algoritması denir (Ullah ve Arshad, 2018).

M - iterasyon algoritmasının bir genellemesi olarak K^* iterasyon algoritması aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.36. (K^* İterasyon Algoritması)

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzay, $S \subset N$, N uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $s_0^1 \in S$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\mu_k^1\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri alındığında;

$$\begin{cases} s_0^1 \in S \\ s_{k+1}^1 = Ms_k^2 \\ s_k^2 = M[(1 - \mu_k^1)s_k^3 + \mu_k^1 Ms_k^3] \\ s_k^3 = (1 - \mu_k^2)s_k^1 + \mu_k^2 Ms_k^1 \end{cases} \quad (4.12)$$

ile verilen algoritmaya K^* iterasyon algoritması denir (Ullah ve Arshad, 2018).

(Ullah ve Arshad, 2018) çalışmasında K^* iterasyon algoritmasının diğer birçok iterasyon algoritmasından daha hızlı olduğu gösterilmiştir. (Yu vd., 2021) çalışmasında, (3.5) eşitsizliği ile tanımlanan M operatörü tarafından üretilen K^* iterasyon algoritmasına ilişkin yakınsaklık ve kararlılık sonuçları elde edilmiştir.

(Şahin, 2019) çalışmasında M -iterasyon algoritması hiperbolik uzaylara aşağıdaki şekilde uyarlanmıştır:

S , bir (Y, ρ, W) hiperbolik uzayın boş olmayan bir alt kümesi, $M : S \rightarrow S$ bir dönüşüm ve herhangi bir $s_0^1 \in S$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\{\mu_k^1\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri

alındığında;

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0^1 \in S \\ s_{k+1}^1 = Ms_k^2 \\ s_k^2 = Ms_k^3 \\ s_k^3 = W(Ms_k^1, s_k^1, \mu_k^1) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

(Şahin, 2019) çalışmasında (4.13) ile tanımlanan M - iterasyon algoritmasının, Osilike tarafından tanımlanan ve (3.6) şartını sağlayan bir M operatörünün sabit noktasına yakınsadığı gösterilerek, bu iterasyon algoritmasının zayıf w^2 - kararlılığına ve M operatörünün sabit noktalarının veri bağıllığına ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir.

5. BAZI SABİT NOKTA İTERASYON DİZİLERİNİN ANALİZİ

Tezin bu bölümünde, Yu vd. (2021) ve Şahin (2019) tarafından sırasıyla reel normlu uzaylarda ve hiperbolik uzaylarda bazı sabit nokta iterasyon algoritmalarının yakınsaklık, kararlılık ve zayıf w^2 – kararlılıklarına ilişkin sonuçlar elde edilmiştir ve bu sonuçlara ilişkin bulgularımız sayısal örneklerle desteklenmiştir.

5.1. K^* ve M - İterasyon Algoritmalarının Yakınsaklıkları

(Yu vd., 2021) ve (Şahin, 2019) çalışmalarında sırasıyla aşağıdaki yakınsaklık teoremleri ispatlanmıştır.

Teorem 5.1. $(N, \|\cdot\|)$ bir reel normlu uzay ve $M : N \rightarrow N$ dönüşümü sabit noktası u^* olan ve (3.5) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $i = 1, 2$ için $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri ve $\sum_{k=0}^\infty \mu_k^1 \mu_k^2 = \infty$ olmak üzere, $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisi (4.12) tarafından üretilen bir dizi olsun. Bu durumda $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisi u^* noktasına kuvvetli yakınsar [Yu vd., (2021), Theorem 3.1].

Teorem 5.2. (X, d, W) bir hiperbolik uzay, X hiperbolik uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi C olsun ve (3.6) şartını sağlayan bir $M : C \rightarrow C$ operatörü tek bir p sabit noktasına sahip olsun. $\{k_n\}$, (4.13) tarafından üretilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}$, $[0, 1]'$ de $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n = \infty$ şartını sağlayan bir reel dizi olsun. Bu durumda, $\{k_n\}$ dizisi p ' ye kuvvetli yakınsar [Şahin, (2019), Teorem 4.4].

Bu bölümde Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 de parametrik kontrol dizileri üzerine konulan $\sum_{k=0}^\infty \mu_k^1 \mu_k^2 = \infty$ kısıtlayıcı şartı kaldırılarak bu sonuçlar yeniden elde edilecektir.

Teorem 5.3. $(N, \|\cdot\|)$ bir reel normlu uzay ve $M : N \rightarrow N'$ ye sabit noktası u^* olan ve (3.5) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $i = 1, 2$ için $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri olmak üzere $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisi (4.12) tarafından üretilen bir dizi olsun. Bu durumda $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisi u^* noktasına kuvvetli yakınsar.

Kanıt. (4.12) ve (3.5) den

$$\begin{aligned}
\|u_k^3 - u^*\| &= \|(1 - \mu_k^2)u_k^1 + \mu_k^2 Mu_k^1 - u^*\| \\
&= \|(1 - \mu_k^2)u_k^1 + \mu_k^2 u^* - \mu_k^2 u^* + \mu_k^2 Mu_k^1 - u^*\| \\
&= \|(1 - \mu_k^2)(u_k^1 - u^*) + \mu_k^2(Mu_k^1 - u^*)\| \\
&\leq (1 - \mu_k^2) \|u_k^1 - u^*\| + \mu_k^2 \|Mu_k^1 - u^*\| \\
&\leq (1 - \mu_k^2) \|u_k^1 - u^*\| + \delta \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| \\
&\leq (1 - \mu_k^2 + \delta \mu_k^2) \|u_k^1 - u^*\| \\
&= (1 - \mu_k^2(1 - \delta)) \|u_k^1 - u^*\|.
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|u_k^2 - u^*\| &= \|M((1 - \mu_k^1)u_k^3 + \mu_k^1 Mu_k^3) - u^*\| \\
&= \delta \|(1 - \mu_k^1)u_k^3 + \mu_k^1 u^* - \mu_k^1 u^* + \mu_k^1 Mu_k^3 - u^*\| \\
&\leq \delta \|(1 - \mu_k^1)(u_k^3 - u^*) + \mu_k^1(Mu_k^3 - u^*)\| \\
&\leq \delta(1 - \mu_k^1) \|u_k^3 - u^*\| + \mu_k^1 \|Mu_k^3 - u^*\| \\
&\leq \delta(1 - \mu_k^1) \|u_k^3 - u^*\| + \delta \mu_k^1 \|u_k^3 - u^*\| \\
&= \delta[1 - \mu_k^1 + \delta \mu_k^1] \|u_k^3 - u^*\| \\
&= \delta[1 - \mu_k^1(1 - \delta)][1 - \mu_k^2(1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\|.
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra benzer yolla

$$\begin{aligned}
\|u_{k+1}^1 - u^*\| &= \|Mu_k^2 - u^*\| \leq \delta \|u_k^2 - u^*\| \\
&\leq \delta^2[1 - \mu_k^1(1 - \delta)][1 - \mu_k^2(1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\|.
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğe tümevarım uygulanırsa,

$$\|u_{k+1}^1 - u^*\| \leq \delta^{2(k+1)} \prod_{n=0}^k [1 - \mu_n^1(1 - \delta)] [1 - \mu_n^2(1 - \delta)] \|u_0^1 - u^*\|. \quad (5.1)$$

$\delta \in [0, 1)$ ve $0 \leq \mu_k^1, \mu_k^2 \leq 1$ olduğu için $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 - \mu_k^1(1 - \delta) < 1$ ve $1 - \mu_k^2(1 - \delta) < 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olur. Bu durumda

$$\|u_{k+1}^1 - u^*\| \leq \delta^{2(k+1)} \|u_0^1 - u^*\|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafına limit uygulanırsa, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{k+1}^1 - u^*\| = 0$ elde edilir ki bu da u_k^1 dizisinin u^* sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını gösterir. $\square$

Teorem 5.4. (X, d, W) bir hiperbolik uzay, X hiperbolik uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi C olsun ve (3.6) şartını sağlayan bir $M : C \rightarrow C$ operatörü tek bir p sabit noktasına sahip olsun. $\{k_n\}$, (4.13) tarafından üretilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}$, $[0, 1]$ ' de bir reel dizi olsun. Bu durumda, $\{k_n\}$ dizisi p ' ye kuvvetli yakınsar.

Kanıt. $(W1)$, (5.19) ve Lemma 3.2 kullanılarak,

$$d(k_{n+1}, p) = d(Ml_n, p) \leq ad(l_n, p) \quad (5.2)$$

$$d(l_n, p) = d(Mm_n, p) \leq ad(m_n, p) \quad (5.3)$$

ve

$$\begin{aligned} d(m_n, p) &= d(W(Mk_n, k_n, \alpha_n), p) \\ &\leq \alpha_n d(Mk_n, p) + (1 - \alpha_n) d(k_n, p) \\ &\leq \alpha_n ad(k_n, p) + (1 - \alpha_n) d(k_n, p) \\ &= (1 - \alpha_n(1 - \alpha)) d(k_n, p) \end{aligned} \quad (5.4)$$

elde edilir. (5.2), (5.3) ve (5.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
d(k_{n+1}, p) &\leq a^2(1 - \alpha_n(1 - a))d(k_n, p) \\
&\leq a^2(1 - \alpha_n(1 - a))a^2(1 - \alpha_n(1 - a))d(k_{n_1}, p) \\
&\leq \dots \\
&\leq (a^2)^{n+1} \prod_{r=0}^n [1 - \alpha_r](1 - a) d(k_0, p)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir. $a \in [0, 1)$ ve $0 \leq \alpha_k \leq 1$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $1 - \alpha_k(1 - a) < 1$ olur.

Bu durumda

$$d(k_{n+1}, p) \leq (a^2)^{n+1} d(k_0, p)$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafına limit uygulanırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_{n+1}, p) = 0$$

elde edilir ki bu da $n \rightarrow \infty$ için k_n dizisinin p sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını gösterir. □

5.2. K^* İterasyon Algoritmasına İlişkin Yakınsaklık Hızı Karşılaştırması

İki veya daha fazla sabit nokta iterasyon algoritmasının belirli bir dönüşüm sınıfının aynı sabit noktasına yakınsadığı bilindiğinde, en yüksek yakınsama oranına ve en hafif iş yüküne sahip iterasyon algoritmasını seçmek hem teorik hem de pratik açıdan büyük önem taşımaktadır. Böylece ele alınan problemi çözmede kullanılabilen mevcut iterasyon algoritmalarından oluşturulmuş bir kümeden, anılan özelliklere sahip olan algoritma ile çalışmak istenilen çözümü bulmak için yapılacak olası aritmetik ve mantıksal işlemlerin sayısını (veya bu amaçla kullanılan bir bilgisayarın çalışma süresini) en aza indirgeyecektir. Objektif olarak böyle bir kararı alabilmek için aşağıdaki kavramlara ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 5.1. $\{\Theta_n^1\}_{n=0}^\infty$, $\{\Theta_n^2\}_{n=0}^\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n^1 = \Theta_1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n^2 = \Theta_2$ olacak şekilde iki iterasyon dizisi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\Theta_n^1 - \Theta_1}{\Theta_n^2 - \Theta_2} \right\| = 0$$

ise, $\{\Theta_n^1\}_{n=0}^\infty$ dizisi $\{\Theta_n^2\}_{n=0}^\infty$ dizisinden daha hızlı yakınsar denir (Brezinski, 2000).

Tanım 5.2. $\{\Theta_n^1\}_{n=0}^\infty$, $\{\Theta_n^2\}_{n=0}^\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n^1 = \Theta_n^2 = \Theta^*$ olacak şekilde iki iterasyon dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\{\kappa_n^1\}_{n=0}^\infty$ ve $\{\kappa_n^2\}_{n=0}^\infty$ pozitif sayıların (sıfıra yakınsayan) iki dizisi için,

$$\|\Theta_n^1 - \Theta^*\| \leq \kappa_n^1 \text{ ve } \|\Theta_n^2 - \Theta^*\| \leq \kappa_n^2$$

olduğunu kabul edelim (burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için κ_n^1 ve κ_n^2 olası en iyi üst sınırlardır (Berinde, 2016)). Eğer $\{\kappa_n^1\}_{n=0}^\infty$, $\{\kappa_n^2\}_{n=0}^\infty$ den daha hızlı yakınsar ise $\{\Theta_n^1\}_{n=0}^\infty$ dizisi Θ^* noktasına $\{\Theta_n^2\}_{n=0}^\infty$ den daha hızlı yakınsar denir (Berinde, 2004).

(Rhoades, 1991) çalışmasında Ishikawa iterasyon algoritmasının, artan fonksiyonların yada tersine; azalan fonksiyonların sabit noktalarına Mann iterasyon algoritmasından daha hızlı yakınsadığı ispatlanmıştır. Diğer taraftan; (Berinde, 2004) çalışmasında

keyfi Banach uzayları çatısı altında, Zamfirescu operatörler sınıfı için Picard ve Mann iterasyon algoritmalarının yakınsaklık oranları karşılaştırılmıştır. Zamfirescu operatörler sınıfı için (Babu ve Prasad, 2006) çalışmasında Mann iterasyon algortimasının Ishikawa iterasyon algortimasından daha hızlı olduğu gösterilmiştir. Kısa bir süre sonra, (Qing ve Rhoades, 2008) çalışmasında, Babu ve Vara Prasad (Babu ve Prasad, 2006) çalışmasındaki iddiasının yanlış olduğu gösterilmiştir.

Büzülme dönüşümleri için, Picard iterasyon algortimasının Mann iterasyon algortimasından daha hızlı olduğu bilinmektedir. Burada bir soru ortaya çıkmaktadır; büzülme dönüşümleri için, yakınsama hızı Picard ve Mann iterasyon algortimalarından daha hızlı olan bir iterasyon algortiması geliştirmek mümkün müdür? 2007 yılında, Agarwal, O'Regan ve Sahu tarafından (Agarwal vd., 2007), yukarıdaki soruya olumlu bir cevap olarak S -iterasyon algortiması tanımlanmıştır. (Agarwal vd., 2007)' de Picard ve S - iterasyon algoritmalarının, büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarına benzer yakınsaklık hızıyla yakınsadıkları ve aynı dönüşüm sınıfı için Mann, Ishikawa ve Noor iterasyon algortimalarından daha hızlı yakınsadıkları gösterilmiştir.

Burada dikkat çekici bir durum söz konusudur: Genelde, Picard iterasyon algoritması genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamaz. (Agarwal vd., 2007) ve (Sahu, 2011)' de çalışılan iterasyon algoritmaları, büzülme dönüşümleri için daha hızlı yakınsaklık hızına sahiptirler. Aynı zamanda, bu iterasyon metodları genişlemeyen dönüşüm sınıfları için de başarılı bir şekilde çalışmaktadır.

(Sahu, 2011) çalışmasında büzülme dönüşüm sınıfı için S - iterasyon algortimasından daha iyi performans gösteren normal - S iterasyon algortiması tanımlanmıştır. (Chugh ve Kumar, 2012)' de CR iterasyon algoritması tanımlanmıştır ve bu algoritmanın büzülebilir dönüşüm sınıfları için Picard, Mann, Ishikawa, Noor, SP ve S -iterasyon algortimalarına denk olduğu ve aynı dönüşüm sınıfları için yine bu algoritmalarından daha hızlı olduğu gösterilmiştir. (Karakaya vd., 2016)' da büzülme dönüşümü sınıfı için CR iterasyon algoritmasının SP^* (Karahan ve Özdemir, 2013) iterasyon algortimasından daha hızlı olduğu gösterilmiştir. (Abbas ve Nazir, 2014)' de Agarwal' in tanımladığı iterasyon algortimasından daha hızlı ve daha iyi yeni bir iterasyon algortiması tanımlanmıştır.

Yakınsama oranı üzerine yapılmış birçok çalışma mevcut olup, [(Gürsoy vd., 2016), (Khan vd., 2016)] ile verilen çalışmalar bunlardan bazılarıdır. Son zamanlarda, (Gürsoy vd., 2020)' de Picard-S iterasyon algortimasının Picard, Mann, Ishikawa ve S - iterasyon algortimalarından daha hızlı olduğu gösterilmiştir. (Chugh vd., 2021)' de CR nin ya Mann, Picard, Ishikawa, Agarwal, SP ve Noor iterasyon algortimalarına denk olduğu yada Banach uzayında yarı büzülebilir tip dönüşümler için bu iterasyon algortimalarından daha hızlı olduğu iddia edilmiştir.

(Yu vd., 2021) çalışmasında (4.12) ile tanımlanan K^* iterasyon algoritmasının (3.5) ile tanımlanan dönüşüm sınıfının u^* sabit noktasına, $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$, $i = 1, 2$ reel diziler olmak üzere

$$\begin{cases} p_0^1 \in S, \\ p_{k+1}^1 = Mp_k^2, \\ p_k^2 = (1 - \mu_k^1)p_k^3 + \mu_k^1Mp_k^3, \\ p_k^3 = (1 - \mu_k^2)p_k^1 + \mu_k^2Mp_k^1, \text{ for all } k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (5.6)$$

ile tanımlanan SP^* iterasyon algoritmasından daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir.

Teorem 5.5. $(N, \|\cdot\|)$ bir reel normlu uzay ve $M : N \rightarrow N'$ ye sabit noktası u^* olan ve (3.5) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $i = 1, 2$ için $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri $\sum_{k=0}^\infty \mu_k^1\mu_k^2 = \infty$ şartını sağlayan diziler olmak üzere $\{p_k^1\}_{k=0}^\infty$ ve $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$, (5.6) ve (4.12) iterasyon algoritmaları tarafından üretilen diziler olsun. Bu durumda $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisi u^* noktasına $\{p_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisinden daha hızlı yakınsar [Yu vd., (2021), Theorem 3.3].

Bu bölümde Teorem 5.6 da parametrik kontrol dizileri üzerine konulan $\sum_{k=0}^\infty \mu_k^1\mu_k^2 = \infty$ kısıtlayıcı şartı kaldırılarak bu sonuçlar yeniden elde edilecektir.

Teorem 5.6. $(N, \|\cdot\|)$ bir reel normlu uzay ve $M : N \rightarrow N$ ye sabit noktası u^* olan ve (3.5) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ ve $\{p_k^1\}_{k=0}^\infty$ sırasıyla (4.12) ve (5.6) ile üretilen diziler ve $u_0^1, p_0^1 \neq u^*$ olsun. Bu takdirde $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisi u^* noktasına $\{p_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

Kanıt. Teorem 5.3 deki (5.1) eşitsizliğinden

$$\|u_{k+1}^1 - u^*\| \leq \delta^{2(k+1)} \prod_{n=0}^k [1 - \mu_n^1(1 - \delta)] [1 - \mu_n^2(1 - \delta)] \|u_0^1 - u^*\| = \kappa_k^{(1)}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

eşitsizliği göz önünde bulundursun.

(3.5) ve (5.6) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \|p_{k+1}^1 - u^*\| &\leq \delta \|p_k^2 - u^*\| \\ &\leq \delta [1 - \mu_k^1(1 - \delta)] \|p_k^3 - u^*\| \\ &\leq \delta [1 - \mu_k^1(1 - \delta)] [1 - \mu_k^2(1 - \delta)] \|p_k^1 - u^*\| \\ &\leq \dots \\ &\leq \delta^{k+1} \prod_{n=0}^k [1 - \mu_n^1(1 - \delta)] [1 - \mu_n^2(1 - \delta)] \|p_0^1 - u^*\| = \kappa_k^{(2)}, \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\kappa_k^{(1)}$ ve $\kappa_k^{(2)}$ sırasıyla $\|u_{k+1}^1 - u^*\|$ ve $\|p_{k+1}^1 - u^*\|$ için birer pozitif üst sınır olup, $\lim_{k \rightarrow \infty} \kappa_k^{(1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \kappa_k^{(2)} = 0$ dır. Bu durumda, Tanım 5.3 için tüm gereksinimler karşılanmış olur.

Şimdi,

$$\Delta_k = \frac{\|\kappa_k^{(1)} - 0\|}{\|\kappa_k^{(2)} - 0\|} = \delta^{k+1} \frac{\|u_0^1 - u^*\|}{\|p_0^1 - u^*\|}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

ile Δ_k tanımlansın.

Böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta^{k+2} \frac{\|u_0^1 - u^*\|}{\|p_0^1 - u^*\|}}{\delta^{k+1} \frac{\|u_0^1 - u^*\|}{\|p_0^1 - u^*\|}} = \delta < 1,$$

elde edilir. Bu da $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k$ serisinin yakınsak olduğu anlamına gelir.

O halde, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\kappa_k^{(1)} - 0\|}{\|\kappa_k^{(2)} - 0\|} = 0$ sonucuna ulaşılır. Tanım 5.1 den $\{\kappa_k^{(1)}\}$ dizisinin $\{\kappa_k^{(2)}\}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı, böylece Tanım 5.2 den $\{u_k^{(1)}\}$ dizisinin $\{p_k^{(2)}\}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı elde edilmiş olur. $\square$

Aşağıdaki örnekte tanımlanan T dönüşümünün bir büzülme dönüşümü olmadığı, yarı kesin büzülebilir dönüşüm olduğu ve T dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığı gösterilmiştir.

Örnek 5.1. $S = [0, 1]$ uzayı alışılmış metrik ile donatılmış olsun ve $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $Tv = \frac{1}{1+v}$ ile tanımlı bir dönüşüm olsun. T dönüşümünün S uzayındaki v sabit noktası $v = \frac{1}{1+v}$ ile hesaplandığında $[0, 1]$ aralığına düşen kökü $v = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618033988$ olarak elde edilir. $v_1 \neq v_2$ olduğunda,

$$|Tv_1 - Tv_2| = |v_1 - v_2| / |(1 + v_1)(1 + v_2)|$$

olması

$$|Tv_1 - Tv_2| / |v_1 - v_2| = 1 / |(1 + v_1)(1 + v_2)| < 1$$

olmasını gerektirir. Buradan, $|Tv_1 - Tv_2| < |v_1 - v_2|$ elde edilir. Böylece, T dönüşümünün S uzayında bir büzülme dönüşümü olmadığı elde edilir.

Bununla birlikte Şekil 5.1, T dönüşümünün herhangi bir $\delta \in [0.618034, 1)$ için (3.5) şartını sağladığını gösterir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için, $\mu_k^1 = \mu_k^2 = \mu_k^3 = \frac{10}{k+10\sqrt{10}}$ alındığında ve her bir iterasyon için 0.8 başlangıç değeri alındığında; çeşitli iterasyon algortimalarının yakınsaklık durumları Çizelge 5.1. ve Şekil 5.2. de görülmektedir.

Çizelge 5.1: Örnek 5.1. için farklı iterasyon algortimalarının yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması

# iteasyon sayısı	S	Normal-S	CR	Picard-S	K*
0	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
1	0.563438674	0.580484164	0.587527981	0.639615752	0.626548978
2	0.636730509	0.626371958	0.623983442	0.620754250	0.618446952
3	0.611828608	0.616162026	0.616863223	0.618382033	0.618054890
4	0.620138126	0.618463819	0.618271872	0.618078907	0.618035088
5	0.617318635	0.617933513	0.617984439	0.618039829	0.618034049
6	0.618279171	0.618057885	0.618044559	0.618034752	0.618033992
7	0.617949493	0.618028213	0.618031684	0.618034088	0.618033988
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	0.618037558	0.618034076	0.618034016	0.618033988	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
13	0.618033832	0.618033988	0.618033988		
⋮	⋮	⋮	⋮		
19	0.618033988				
⋮	⋮				
# iterasyon sayısı	Picard	Mann	Ishikawa	Noor	SP*
0	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
1	0.555555556	0.722699880	0.730582998	0.729746825	0.596044416
2	0.642857141	0.679105885	0.688687472	0.687633216	0.620824628
3	0.608695653	0.654256412	0.663028749	0.662032296	0.617664249
4	0.621621622	0.639885756	0.647085147	0.646244532	0.618084977
5	0.616666667	0.631439704	0.637038324	0.636368867	0.618026693
6	0.618556700	0.626392527	0.630621554	0.630105309	0.618035069
7	0.617834395	0.623326616	0.626470258	0.626079526	0.618033824
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	0.618045111	0.619495877	0.620743540	0.620581775	0.618033988
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	0.618033988	0.618089961	0.618177720	0.618165526	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

5.3. K^* ve M - İterasyon Algoritmalarının Kararlılıkları

Kararlılık kavramı üzerine bazı çarpıcı sonuçlar 1988 yılında Harder ve Hicks (Harder ve Hicks, 1988) tarafından inşa edilmiştir. (Harder ve Hicks, 1988) çalışmasında birinci mertebeden diferansiyel denklem uygulamalarının kararlılık sonuçları oluşturulmuştur. (Osilike ve Udomene, 1999) çalışmasında çeşitli iterasyon metodları için kararlılık sonuçları geliştirilmiştir. Berinde (Berinde, 2007), Olatinwo (Olatinwo, 2008), Imoru ve Olatinwo (Imoru ve Olatinwo, 2003), Karakaya vd. (Karakaya vd., 2013) ve daha birçok araştırmacı tarafından Osilike ve Udomene (Osilike ve Udomene, 1999)' de verilen yöntem uygulanarak bazı kararlılık sonuçları elde edilmiştir.

(Yu vd., 2021) ve (Şahin, 2019)' da sırasıyla aşağıdaki kararlılık teoremleri ispatlanmıştır.

Teorem 5.7. $(N, \|\cdot\|)$ bir reel normlu uzay ve $M : N \rightarrow N'$ ye sabit noktası u^* olan ve (3.5) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $i = 1, 2$ için $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri ve $\sum_{k=0}^\infty \mu_k^1 \mu_k^2 = \infty$ olmak üzere, $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisi (4.12) tarafından üretilen bir dizi olsun. $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ iterasyon dizisi M - kararlıdır [Yu vd., (2021), Theorem 3.2].

Teorem 5.8. (X, d, W) bir hiperbolik uzay, X hiperbolik uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi C olsun ve (3.6) şartını sağlayan bir $M : C \rightarrow C$ operatörü tek bir p sabit noktasına sahip olsun. $\{k_n\}$, (4.13) tarafından üretilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}$, $[0, 1]$ ' de $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n = \infty$ şartını sağlayan bir reel dizi olsun. Bu durumda, $\{k_n\}$ dizisi M' ye göre zayıf w^2 - kararlıdır [Şahin, (2019), Teorem 4.5].

Bu bölümde Teorem 5.7 ve 5.8 de parametrik kontrol dizileri üzerine konulan $\sum_{k=0}^\infty \mu_k^1 \mu_k^2 = \infty$ kısıtlayıcı şartı kaldırılarak bu sonuçlar yeniden elde edilecektir.

Teorem 5.9. $(N, \|\cdot\|)$ bir reel normlu uzay ve $M : N \rightarrow N'$ ye sabit noktası u^* olan ve (3.5) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $i = 1, 2$ için $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, 1]$ reel dizileri olmak üzere $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisi (4.12) tarafından üretilen bir dizi olsun. Bu durumda $\{u_k^1\}_{k=0}^\infty$ dizisi M - kararlıdır.

Kanut. $\{\tau_k\}$, N uzayında keyfi bir dizi ve $\zeta_k = M[(1 - \mu_k^1)\gamma_k + \mu_k^1 M\gamma_k]$, $\gamma_k = (1 - \mu_k^2)\tau_k + \mu_k^2 M\tau_k$ olduğunda, $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^+$ aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\varepsilon_k = \|\tau_{k+1} - M\zeta_k\|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.7)$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ olsun. $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = u^*$ olduğu gösterilecektir. $\delta \in [0, 1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \mu_k^1, \mu_k^2 \leq 1$, $1 - \mu_k^1(1 - \delta) < 1$, $1 - \mu_k^2(1 - \delta) < 1$ ve (4.12), (3.5) ve (5.7) iterasyon

ve eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|\tau_{k+1} - u^*\| &\leq \|\tau_{k+1} - u_{k+1}^1\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| \\
&\leq \|\tau_{k+1} - M\varsigma_k\| + \|M\varsigma_k - Tu_k^2\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| \\
&\leq \varepsilon_k + \delta \|\varsigma_k - u_k^2\| + 2\delta \|u_k^2 - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| \\
&\leq \varepsilon_n + \delta \|(1 - \mu_k^1) \gamma_k + \mu_k^1 M\gamma_k - [(1 - \mu_k^1) u_k^3 + \mu_k^1 Mu_k^3]\| \\
&\quad + 2\delta \|(1 - \mu_k^1) u_k^3 + \mu_k^1 Mu_k^3 - u^*\| + 2\delta \|u_k^2 - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| \\
&\leq \varepsilon_n + \delta (1 - \mu_k^1) \|\gamma_k - u_k^3\| + \delta \mu_k^1 \|M\gamma_k - Mu_k^3\| \\
&\quad + 2\delta (1 - \mu_k^1) \|u_k^3 - u^*\| + 2\delta^2 \mu_k^1 \|u_k^3 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta \|u_k^2 - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| \\
&\leq \varepsilon_n + \delta (1 - \mu_k^1) (1 - \mu_k^2) \|\tau_k - u_k^1\| + \delta^2 (1 - \mu_k^1) \mu_k^2 \|\tau_k - u_k^1\| \\
&\quad + 2\delta^2 (1 - \mu_k^1) \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| + \delta^2 \mu_k^1 \|\gamma_k - u_k^3\| + 2\delta^2 \mu_k^1 \|u_k^3 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] \|u_k^3 - u^*\| + 2\delta \|u_k^2 - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| \\
&\leq \varepsilon_n + \delta (1 - \mu_k^1) (1 - \mu_k^2) \|\tau_k - u_k^1\| + \delta^2 (1 - \mu_k^1) \mu_k^2 \|\tau_k - u_k^1\| \\
&\quad + 2\delta^2 (1 - \mu_k^1) \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| + \delta^2 \mu_k^1 (1 - \mu_k^2) \|\tau_k - u_k^1\| \\
&\quad + \delta^3 \mu_k^1 \mu_k^2 \|\tau_k - u_k^1\| + 2\delta^3 \mu_k^1 \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| + 2\delta^2 \mu_k^1 \|u_k^3 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] \|u_k^3 - u^*\| + 2\delta \|u_k^2 - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| \\
&\leq \varepsilon_n + \delta [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] [1 - \mu_k^2 (1 - \delta)] \|\tau_k - u^*\| \\
&\quad + \delta [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] [1 - \mu_k^2 (1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta^2 (1 - \mu_k^1) \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| + 2\delta^3 \mu_k^1 \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta^2 \mu_k^1 \|u_k^3 - u^*\| + 2\delta [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] \|u_k^3 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta \|u_k^2 - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| \\
&\leq \varepsilon_n + \delta [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] [1 - \mu_k^2 (1 - \delta)] \|\tau_k - u^*\| \\
&\quad + \delta [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] [1 - \mu_k^2 (1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta^2 (1 - \mu_k^1) \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| + 2\delta^3 \mu_k^1 \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta^2 \mu_k^1 [1 - \mu_k^2 (1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] [1 - \mu_k^2 (1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\| \\
&\quad + 2\delta^2 [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] [1 - \mu_k^2 (1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| \\
&\leq \delta \|\tau_k - u^*\| + 11 \|u_k^1 - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| + \varepsilon_k, \forall k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

elde edilir. ρ_k , σ_k ve α ;

$$\rho_k : = 11 \|u_k^1 - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| + \varepsilon_k \geq 0$$

$$\sigma_k : = \|\tau_k - u^*\| \geq 0$$

$$\alpha : = \delta \in [0, 1), \forall k \in \mathbb{N}.$$

ile tanımlansın. Teorem 5.3 den, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{k+1}^1 - u^*\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k^1 - u^*\| = 0$ elde edilir. $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ yazılabilir. [(Liu, 1990) Lemma, sayfa 302] şartları sağlandığı için, $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\tau_k - u^*\| = 0$ olduğu elde edilir.

Tersine, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tau_k\| = u^*$ olsun. $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ olduğu gösterilecektir. $\delta \in [0, 1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \mu_k^1, \mu_k^2 \leq 1$, $1 - \mu_k^1(1 - \delta) < 1$, $1 - \mu_k^2(1 - \delta) < 1$ ve (4.12), (3.5) ve (5.7) iterasyon ve eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \|\tau_{k+1} - M\varsigma_k\| \leq \|\tau_{k+1} - u_{k+1}^1\| + \|Mu_k^2 - M\varsigma_k\| \\ &\leq \|\tau_{k+1} - u_{k+1}^1\| + \delta \|u_k^2 - \varsigma_k\| + 2\delta \|\varsigma_k - u^*\| \\ &\leq \|\tau_{k+1} - u_{k+1}^1\| + \delta [1 - \mu_k^1(1 - \delta)] \|u_k^3 - \varsigma_k\| \\ &\quad + 2\delta [1 - \mu_k^1(1 - \delta) + \delta\mu_k^1] \|\gamma_k - u^*\| + 2\delta \|\varsigma_k - u^*\| \\ &\leq \|\tau_{k+1} - u_{k+1}^1\| + \delta [1 - \mu_k^1(1 - \delta)] [1 - \mu_k^2(1 - \delta)] \|u_k^1 - \tau_k\| \\ &\quad + 2\delta^2 [1 - \mu_k^1(1 - \delta)] \mu_k^2 \|\tau_k - u\| \\ &\quad + 2\delta [1 - \mu_k^1(1 - \delta) + \delta\mu_k^1] [1 - \mu_k^2(1 - \delta)] \|\tau_k - u^*\| \\ &\quad + 2\delta^2 [1 - \mu_k^1(1 - \delta)] [1 - \mu_k^2(1 - \delta)] \|\tau_k - u^*\| \\ &\leq \|\tau_{k+1} - u^*\| + \|u_{k+1}^1 - u^*\| + \|u_k^1 - u^*\| + \|\tau_k - u^*\| + \varkappa_k \|\tau_k - u^*\|, \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\varkappa_k$ dizisi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\varkappa_k = 2[3 - \mu_k^1(1 - 2\delta)] \in [2, 4]$ şeklinde tanımlanan pozitif sayıların sonlu bir dizisidir. $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = u^*$ ve Teorem 5.3 den $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k^1 = u^*$ elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafa limit uygulanırsa, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ elde edilir. Böylece, $\{u_k^1\}$ dizisinin M -kararlı olduğu sonucuna varılır.

□

Teorem 5.10. (X, d, W) bir hiperbolik uzay, X hiperbolik uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi C olsun ve (3.6) şartını sağlayan $M : C \rightarrow C$ operatörü tek bir p sabit noktasına sahip olsun. $\{k_n\}$, (4.13) tarafından üretilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}$, $[0, 1]$ ' de bir reel dizi olsun. Bu durumda, $\{k_n\}$ dizisi M' ye göre zayıf w^2 - kararlıdır.

Kanıt. $\{k_n\}$, (4.13) tarafından üretilen bir dizi ve $\{p_n\}$ dizisi $\{k_n\}$, dizisinin bir denk dizisi olsun. $q_n = Mr_n$, $r_n = W(Mp_n, p_n, \alpha_n)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ olsun. $\varepsilon_n = d(p_{n+1}, Mq_n)$ olduğunu kabul edelim. (4.13), (3.7) ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} d(p_{n+1}, p) &\leq d(p_{n+1}, k_{n+1}) + d(k_{n+1}, p) \\ &\leq d(p_{n+1}, Mq_n) + d(Mq_n, Ml_n) + d(k_{n+1}, p) \\ &\leq \varepsilon_n + a.d(l_n, q_n) + L.d(l_n, Ml_n) + d(k_{n+1}, p) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$d(l_n, q_n) = d(Mm_n, Mr_n) \leq ad(m_n, r_n) + L.d(m_n, Mm_n) \quad (5.9)$$

ve

$$\begin{aligned} d(m_n, r_n) &= d(W(Mk_n, k_n, \alpha_n), d(W(Mp_n, p_n, \alpha_n))) \\ &\leq \alpha_n d(Mk_n, Mp_n) + (1 - \alpha_n) d(k_n, p_n) \\ &\leq \alpha_n [a.d(k_n, p_n) + L.d(k_n, Mk_n)] + (1 - \alpha_n) d(k_n, p_n) \\ &= (1 - \alpha_n(1 - a)) d(k_n, p_n) + \alpha_n L.d(k_n, Mk_n) \end{aligned} \quad (5.10)$$

ifadeleri elde edilir. (5.8), (5.9) ve (5.10) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} d(p_{n+1}, p) &\leq \varepsilon_n + a^2(1 - \alpha_n(1 - a)) d(k_n, p_n) + a^2 \alpha_n L.d(k_n, Mk_n) \\ &\quad + aL.d(m_n, Mm_n) + Ld(l_n, Ml_n) + d(k_{n+1}, p) \end{aligned} \quad (5.11)$$

yazabiliriz. Teorem 5.4 den $\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_{n+1}, p) = 0$ dır. Lemma 3.2 den

$$\begin{aligned} d(k_n, Mk_n) &\leq d(k_n, p) + d(p, Mk_n) \\ &\leq d(k_n, p) + ad(p, k_n) \\ &\leq (1 + a)d(k_n, p) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, Mk_n) = 0$ olur.

(5.3) ve (5.4) eşitliklerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(l_n, Ml_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(m_n, Mm_n) = 0$$

elde edilir. $\{k_n\}$ ve $\{p_n\}$ denk dizi olduklarından, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, p_n) = 0$ dır. (5.11) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ yaklaşımı ile $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p_{n+1}, p) = 0$ elde edilir. Böylece $\{k_n\}$, M' ye göre zayıf w^2 - kararlı olarak elde edilir. $\square$

5.4. K^* ve M - İterasyon Algoritmalarının Veri Bağılıkları

Birçok durumda mevcut analitik yöntemler, bir dönüşümün sabit bir noktasını hesaplamada yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle, söz konusu dönüşümün sabit noktasını hesaplamak yerine, sabit noktaları kolayca hesaplanabilen başka bir dönüşüm yardımıyla, sabit noktası hesaplanmak istenilen dönüşümün sabit noktasının yerini belirlemek için bir yaklaşımda bulunulabilir. Sabit noktaların “Veri Bağılılığı” adı verilen bu yaklaşım, ilginç uygulamaları nedeniyle, son zamanlarda birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve yoğun bir şekilde çalışılmaktadır [(Markin, 1973), (Murasen ve Rus, 1998), (Bridson ve Haeffiger, 1999), (Berinde, 2003), (Petruşel ve Espinola, 2005), (Şoltuz ve Grosan, 2008), (Olatinwo, 2009), (Chugh ve Kumar, 2012), (Karakaya vd., 2013), (Karakaya vd., 2013), (Ullah ve Arshad, 2018), (Ertürk ve Gürsoy, 2019), (Gürsoy vd, 2019)].

K^* iterasyon algoritmasına ilişkin veri bağılılığı sonucu aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.11. $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $M : N \rightarrow N$ ye tanımlanan, sabit noktası u^* olan ve (3.5) şartını sağlayan bir dönüşüm ve $\widetilde{M} : N \rightarrow N$, M dönüşümünün yaklaşık bir dönüşümü olsun. Yani, $u \in N$ için $\|Mu - \widetilde{M}u\| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\epsilon > 0$ vardır. $i = 1, 2$ için $\{\mu_k^i\}_{k=0}^\infty$ reel dizileri olmak üzere $\{u_k^1\}$ (4.12) ile iterasyon algoritması tarafından üretilen bir dizi ve $\{\widetilde{u}_k^1\}$ da

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{u}_0^1 \in S \\ \widetilde{u}_{k+1}^1 = \widetilde{M}\widetilde{u}_k^2, \\ \widetilde{u}_k^2 = \widetilde{M} \left[(1 - \mu_k^1) \widetilde{u}_k^3 + \mu_k^1 \widetilde{M}\widetilde{u}_k^3 \right], \\ \widetilde{u}_k^3 = (1 - \mu_k^2) \widetilde{u}_k^1 + \mu_k^2 \widetilde{M}\widetilde{u}_k^1, \forall k \in \mathbb{N}, \end{array} \right. \quad (5.11)$$

ile tanımlı iterasyon algoritması tarafından üretilen dizi olsun. $\lim_{k \rightarrow \infty} \widetilde{u}_k^1 = \widetilde{u}^*$ ise $\epsilon > 0$ için

$$\|u^* - \widetilde{u}^*\| \leq \left(\frac{1 + \delta^2}{1 - \delta} \right) \epsilon.$$

elde edilir.

Kanıt. (4.12), (3.5) ve (5.11) iterasyon ve eşitsizlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}^1 - \tilde{u}_{k+1}^1\| &\leq \|Mu_k^2 - M\tilde{u}_k^2\| + \|M\tilde{u}_k^2 - \widetilde{M}\tilde{u}_k^2\| \\ &\leq \delta \|u_k^2 - \tilde{u}_k^2\| + 2\delta \|u_k^2 - u^*\| + \epsilon, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \|u_k^2 - \tilde{u}_k^2\| &= \|M[(1 - \mu_k^1)u_k^3 + \mu_k^1 Mu_k^3] - \widetilde{M}[(1 - \mu_k^1)\tilde{u}_k^3 + \mu_k^1 \widetilde{M}\tilde{u}_k^3]\| \\ &\leq \|M[(1 - \mu_k^1)u_k^3 + \mu_k^1 Tu_k^3] - M[(1 - \mu_k^1)\tilde{u}_k^3 + \mu_k^1 \widetilde{M}\tilde{u}_k^3]\| \\ &\quad + \|M[(1 - \mu_k^1)\tilde{u}_k^3 + \mu_k^1 \widetilde{M}\tilde{u}_k^3] - \widetilde{M}\widetilde{M}[(1 - \mu_k^1)\tilde{u}_k^3 + \mu_k^1 \widetilde{M}\tilde{u}_k^3]\| \\ &\leq \delta \|(1 - \mu_k^1)u_k^3 + \mu_k^1 Mu_k^3 - (1 - \mu_k^1)\tilde{u}_k^3 - \mu_k^1 \widetilde{M}\tilde{u}_k^3\| \\ &\quad + 2\delta \|(1 - \mu_k^1)u_k^3 + \mu_k^1 Mu_k^3 - u^*\| + \epsilon \\ &\leq \delta [1 - \mu_k^1(1 - \delta)] \|u_k^3 - \tilde{u}_k^3\| + 2\delta^2 \mu_k^1 \|u_k^3 - u^*\| + \delta \mu_k^1 \epsilon \\ &\quad + 2\delta [1 - \mu_k^1(1 - \delta)] \|u_k^3 - u^*\| + \epsilon, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \|u_k^2 - u^*\| &= \|M[(1 - \mu_k^1)u_k^3 + \mu_k^1 Mu_k^3] - u^*\| \\ &\leq \delta \|(1 - \mu_k^1)u_k^3 + \mu_k^1 Mu_k^3 - u^*\| \\ &\leq \delta [1 - \mu_k^1(1 - \delta)] \|u_k^3 - u^*\|, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \|u_k^3 - \tilde{u}_k^3\| &= \|(1 - \mu_k^2)u_k^1 + \mu_k^2 Mu_k^1 - (1 - \mu_k^2)\tilde{u}_k^1 - \mu_k^2 \widetilde{M}\tilde{u}_k^1\| \\ &\leq [1 - \mu_k^2(1 - \delta)] \|u_k^1 - \tilde{u}_k^1\| + 2\delta \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| + \mu_k^2 \epsilon, \end{aligned} \quad (5.15)$$

ve

$$\|u_k^3 - u^*\| = [1 - \mu_k^2(1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\| \quad (5.16)$$

elde edilir.

(5.12), (5.13), (5.14), (5.15) ve (5.16) eşitsizlikleri birleştirilerek,

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}^1 - \tilde{u}_{k+1}^1\| &\leq \delta^2 \{ (1 - \mu_k^2) [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] + \delta^2 \mu_k^1 \mu_k^2 \} \|u_k^1 - \tilde{u}_k^1\| \\ &\quad + 2\delta^4 \mu_k^1 \mu_k^2 \|u_k^1 - u^*\| + 2\delta^3 \mu_k^1 [1 - \mu_k^2 (1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\| \\ &\quad + 4\delta^2 [1 - \mu_k^1 (1 - \delta)] [1 - \mu_k^2 (1 - \delta)] \|u_k^1 - u^*\| \\ &\quad + \delta^2 (1 - \mu_k^1) \mu_k^2 \epsilon + \delta^3 \mu_k^1 \mu_k^2 \epsilon + \delta^2 \mu_k^1 \epsilon + \delta \epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için, $\delta \in [0, 1)$ and $0 \leq \mu_k^1, \mu_k^2 \leq 1$, $1 - \mu_k^1 (1 - \delta) < 1$, $1 - \mu_k^2 (1 - \delta) < 1$ olduğu için, (5.16) eşitsizliğinden

$$\|u_{k+1}^1 - \tilde{u}_{k+1}^1\| \leq \delta^2 \|u_k^1 - \tilde{u}_k^1\| + (2\delta^4 + 2\delta^3 + 4\delta^2) \|u_k^1 - u^*\| + \delta^3 \epsilon + \delta^2 \epsilon + \delta \epsilon + \epsilon. \quad (5.17)$$

elde edilir.

Teorem 5.3 den $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k^1 = u^*$ dir ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k^1 = \tilde{u}^*$ olduğundan, (5.17) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınır,

$$\|u^* - \tilde{u}^*\| \leq \delta^2 \|u^* - \tilde{u}^*\| + \delta^3 \epsilon + \delta^2 \epsilon + \delta \epsilon + \epsilon,$$

veya

$$\|u^* - \tilde{u}^*\| \leq \left(\frac{1 + \delta^2}{1 - \delta} \right) \epsilon.$$

olduğu elde edilir. □

Aşağıda verilen örnekte, v^* sabit noktasının veri bağıllığı incelenmiştir.

Örnek 5.2. $S = [0, 1]$ uzayı alışılmış metrik ile donatılmış olsun ve $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $Tv = \frac{1}{1+v}$ ile tanımlı bir dönüşüm ve $\tilde{T} : S \rightarrow S$ dönüşümü de

$$\tilde{T}v = \frac{v^2 + 4.2v + 24.41}{25} - \lim \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\pi v}{4} \right). \quad (5.18)$$

olarak tanımlansın.

$\tilde{T}$ dönüşümünün sabit noktası $\tilde{v}^* = 0.624321324$ dır. *Mathematica* paket programı aracılığı ile

$$\sup_{v \in [0,1]} |Tv - \tilde{T}v| = 0.0368247$$

olduğu elde edilir. Bu sonuçta her $v \in [0, 1]$ için $|Tv - \tilde{T}v| \leq \epsilon = 0.0368247$ olmasını gerektirir. Böylece $\tilde{T}$ operatörü T operatörünün yaklaşık operatörü olarak gözönüne alınabilir. Örnek 5.1 de (4.12) iterasyon algortimasının $0.618033988 = v^* = Tv^*$ noktasına yakınsadığı görülür. Diğer yandan (5.18) de tanımlanan $\tilde{T}$ operatörü tarafından üretilen (5.11) iterasyon algoritması $\tilde{u}_0^1 = 0.8 \in S$ başlangıç noktası ve $\mu_k^1 = \mu_k^2 = \frac{10}{k+10\sqrt{10}}, \forall k \in \mathbb{N}$, dizileri için $0.624321324 = \tilde{v}^* = \tilde{T}\tilde{v}$ noktasına yakınsar (bkz. Çizelge 5.2).

Şimdi, $|v^* - \tilde{v}^*| = 0.00628734$ elde edilir. Bununla birlikte, $\tilde{v}^*$ noktasını bilmeden ve hesaplamadan, Theorem 5.9 un sonucunu kullanarak $|v^* - \tilde{v}^*|$ için bir üst sınır aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$|v^* - \tilde{v}^*| \leq \left(\frac{1 + (0.618034)^2}{1 - 0.618034} \right) \times 0.0368247 = 0.133233.$$

Çizelge 5.2: Örnek 5.2 için (5.11) iterasyon algoritmasının yakınsaklık hareketleri

# iterasyon sayısı	(5.18) denklemindeki (5.11) ile tanımlanan $\tilde{T}$ iterasyon değerleri
0	0.8
1	0.636212670
2	0.625157924
3	0.624383094
4	0.624326092
5	0.624321699
6	0.624321349
7	0.624321326
8	0.624321324
$\vdots$	$\vdots$

(Şahin, 2019) çalışmasında Hiperbolik uzaylarda veri bağılılığı sonucu aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 5.12. (X, d, W) bir hiperbolik uzay, X hiperbolik uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi C olsun ve (3.6) şartını sağlayan bir $M : C \rightarrow C$ operatörü tek bir p sabit noktasına sahip olsun. $\{k_n\}$, (4.13) tarafından üretilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}$, $[0, 1]$ ' de $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlayan bir reel dizi olsun. $\tilde{M} : C \rightarrow C$ operatörü, verilen bir $\epsilon > 0$ için, M ' nin yaklaşık operatörü ve $\tilde{p}$, $\tilde{M}$ ' nin bir sabit noktası olsun. $\{\tilde{k}_n\}$ dizisi,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_0 \in C \\ \tilde{k}_{n+1} = \tilde{M}\tilde{l}_n \\ \tilde{l}_n = \tilde{M}\tilde{m}_n \\ \tilde{m}_n = W(\tilde{M}\tilde{k}_n, \tilde{k}_n, \alpha_n), \quad \forall n \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.19)$$

iterasyon algoritması tarafından üretilen bir dizi olsun. $\tilde{k}_n$ dizisinin $\tilde{p}$ ' ye yakınsak olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\delta \in [0, 1)$ için

$$d(p, \tilde{p}) \leq \frac{(\delta^2 + \delta + 1)\epsilon}{1 - \delta^2}$$

dir [Şahin, (2019), Teorem 4.6].

Şimdi (Şahin, 2019)' da parametrik kontrol dizileri üzerine konulan $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı kaldırılarak veri bağıllığı sonucu yeniden elde edilecektir.

Teorem 5.13. (X, d, W) bir hiperbolik uzay, X hiperbolik uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi C olsun ve (3.6) şartını sağlayan bir $M : C \rightarrow C$ operatörü tek bir p sabit noktasına sahip olsun. $\{k_n\}$, (4.13) tarafından üretilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}$, $[0, 1]$ ' de bir reel dizi olsun. $\tilde{M} : C \rightarrow C$ operatörü, verilen bir $\epsilon > 0$ için, M ' nin yaklaşık operatörü ve $\tilde{p}$, $\tilde{M}$ ' nin bir sabit noktası olsun. $\{\tilde{k}_n\}$ dizisi, (5.19) ile üretilen bir dizi olsun. $\tilde{k}_n$ dizisinin $\tilde{p}$ ' ye yakınsak olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\delta \in [0, 1)$ için

$$d(p, \tilde{p}) \leq \frac{(\delta^2 + \delta + 1)\epsilon}{1 - \delta^2}$$

dir.

Kanıt. (4.13), (3.6), (5.19) ve (W4)' den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(k_{n+1}, \tilde{k}_{n+1}) &= d(Ml_n, \tilde{M}\tilde{l}_n) \\ &\leq d(Ml_n, M\tilde{l}_n) + d(M\tilde{l}_n, \tilde{M}\tilde{l}_n) \\ &\leq \delta d(l_n, \tilde{l}_n) + Ld(Ml_n, Ml_n) + \epsilon \\ &= \delta d(Mm_n, \tilde{M}\tilde{z}_n) + Ld(l_n, Ml_n) + \epsilon \\ &\leq \delta \{d(Mm_n, M\tilde{m}_n) + d(M\tilde{m}_n, \tilde{M}\tilde{m}_n)\} + Ld(l_n, Ml_n) + \epsilon \\ &\leq \delta^2 d(m_n, \tilde{m}_n) + \delta Ld(m_n, Mm_n) + \delta\epsilon + Ld(l_n, Ml_n) + \epsilon \\ &= \delta^2 d(W(Mk_n, k_n, \alpha_n), W(\tilde{M}\tilde{k}_n, \tilde{k}_n, \alpha_n)) + \delta Ld(m_n, Mm_n) + \\ &\quad \delta\epsilon + Ld(l_n, Ml_n) + \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dots &\leq \delta^2\{\alpha_n d((Mk_n, \tilde{M}\tilde{k}_n) + (1 - \alpha_n)d(k_n, \tilde{k}_n)\} + \delta Ld(m_n, Mm_n) \\
&\quad \delta\epsilon + Ld(l_n, Ml_n) + \epsilon \\
&\leq \delta^2\alpha_n\{d(Mk_n, M\tilde{k}_n) + d(M\tilde{k}_n, \tilde{M}\tilde{k}_n)\} + \delta^2(1 - \alpha_n)d(k_n, \tilde{k}_n) + \\
&\quad \delta Ld(m_n, Mm_n) + \delta\epsilon + Ld(l_n, Ml_n) + \epsilon \\
&\leq \delta^2\alpha_n\{d(k_n, \tilde{k}_n) + Ld(k_n, Tk_n)\} + \delta^2\alpha_n\epsilon + \delta^2(1 - \alpha_n)d(k_n, \tilde{k}_n) + \\
&\quad \delta Ld(m_n, Mm_n) + \delta\epsilon + Ld(l_n, Ml_n) + \epsilon \\
&= \delta^2[1 - \alpha_n(1 - \delta)]d(k_n, \tilde{k}_n) + \delta^2\alpha_n Ld(k_n, Mk_n) + \delta Ld(m_n, Mm_n) + \\
&\quad + Ld(l_n, Ml_n) + (\delta^2\alpha_n + \delta + 1)\epsilon
\end{aligned} \tag{5.20}$$

olduğu elde edilir. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha_n \leq 1 \quad 1 - \alpha_n(1 - \delta) \leq 1$$

olduğundan, (5.4.) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
d(k_{n+1}, \tilde{k}_{n+1}) &\leq \delta^2 d(k_n, \tilde{k}_n) + \delta^2 \alpha_n Ld(k_n, Mk_n) + \\
&\quad \delta Ld(m_n, Ml_n) + Ld(l_n, Ml_n) + (\delta^2 \alpha_n + \delta + 1)\epsilon
\end{aligned} \tag{5.21}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi ise metrikler için üçgen eşitsizliğinin, (W1) şartının, (4.13) eşitsizliğinin, (3.7) iterasyon algoritmasının ve her $\forall n \in \mathbb{N}$ için $1 - \alpha_n(1 - \delta) \leq 1$ gerçeğinin kullanılmasıyla, her $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
d(k_n, Mk_n) &\leq d(k_n, p) + d(Mp, Mk_n) \\
&\leq d(k_n, p) + \delta d(p, k_n) + Ld(p, Mp) \\
&= (1 + \delta)d(k_n, p)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
d(m_n, Mm_n) &\leq d(m_n, p) + d(Mp, Mm_n) \\
&\leq d(m_n, p) + \delta d(p, m_n) + Ld(p, Mp) \\
&= (1 + \delta)d(m_n, p) \\
&= (1 + \delta)d(W(Mk_n, k_n, \alpha_n)p) \\
&\leq (1 + \delta)(\alpha_n \delta d(p, k_n) + \alpha_n Ld(p, Mp) + (1 - \alpha_n)d(k_n, p)) \\
&= (1 + \delta)[1 - \alpha_n(1 - \delta)]d(k_n, p)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
d(l_n, Ml_n) &\leq d(l_n, p) + d(Mp, Ml_n) \\
&\leq d(l_n, p) + \delta d(p, l_n) + Ld(p, Mp) \\
&= (1 + \delta)d(l_n, p) \\
&= (1 + \delta)d(p, Mm_n) \\
&\leq (1 + \delta)\delta d(p, m_n) + (1 + \delta)Ld(p, Mp) \\
&= (1 + \delta)\delta[1 - \alpha_n(1 - \delta)]d(k_n, p) \\
&\leq (1 + \delta)\delta d(k_n, p)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

olduğu elde edilir. Teorem 5.4 den ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, p) = 0$ olduğundan, metrik fonksiyonunun sürekli olduğu gerçeği göz önüne alınarak, (5.22), (5.23) ve (5.24) eşitsizliklerinin her iki taraflarının limitinin alınmasıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(k_n, Mk_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(m_n, Mm_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(l_n, Ml_n) = 0 \tag{5.25}$$

sonucu elde edilir. Böylece, (5.21) eşitsizliğinin her iki tarafının limiti alınır ve (5.25)' de elde edilen ifadeler ve $n \rightarrow \infty$ iken $k_n \rightarrow p$ gerçeği ile $\tilde{k}_n \rightarrow p$ kabulü kullanılırsa,

$$d(p, \tilde{p}) \leq \delta^2 d(p, \tilde{p}) + (\delta^2 + \delta + 1)\epsilon$$

veya

$$d(p, \tilde{p}) \leq \frac{(\delta^2 + \delta + 1)\epsilon}{1 - \delta^2}$$

olduğu elde edilir.

□

Burada önemli bazı durumların özellikle belirtilmesi gerekmektedir.

Not 5. Şahin' in (Şahin, 2019) çalışmasındaki Teorem 4.4, Teorem 4.5 ve Teorem 4.6' da α_n dizisinin üzerine konulan $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ kısıtı, (4.13) ile verilen M - iterasyon algoritmasının, (3.7) şartını sağlayan bir T dönüşümünün sabit noktasına yakınsamasını garanti etmiştir. Dolayısıyla Teorem 5.13' te de kullanılan bu kısıtlama gerekli değildir.

Not 6. Şahin tarafından (Şahin, 2019) çalışmasında Teorem 4.6' nın ispatında kullanılan ve bu teoremin ispatlanmasında anahtar rol oynayan Lemma 3.3' de tutarsızlık bulunmaktadır, çünkü, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \alpha_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup t_n$ ' in varlığı her zaman garanti edilememektedir. Örneğin, her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n = n^2 + \frac{5}{2}$, $r_n = \frac{2}{5}$ ve $\alpha_n = n$ olarak alınır ve (11)' de yerlerine konulursa,

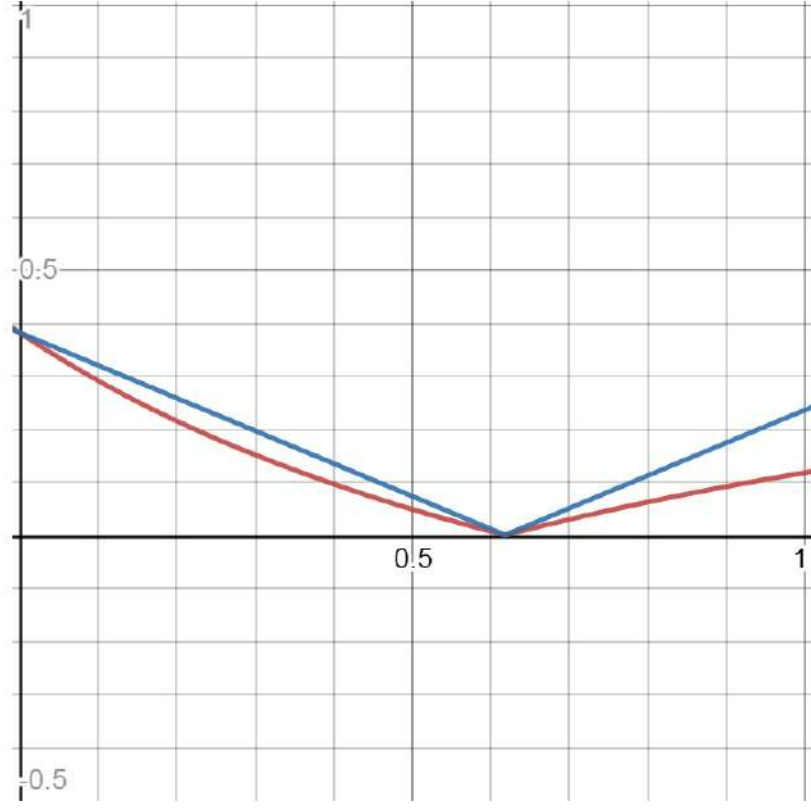
$$n + 1 \leq \left(1 - \frac{2}{5}\right)n + \frac{2}{5}\left(n^2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{5}n + \frac{2}{5}n^2 + 1$$

veya

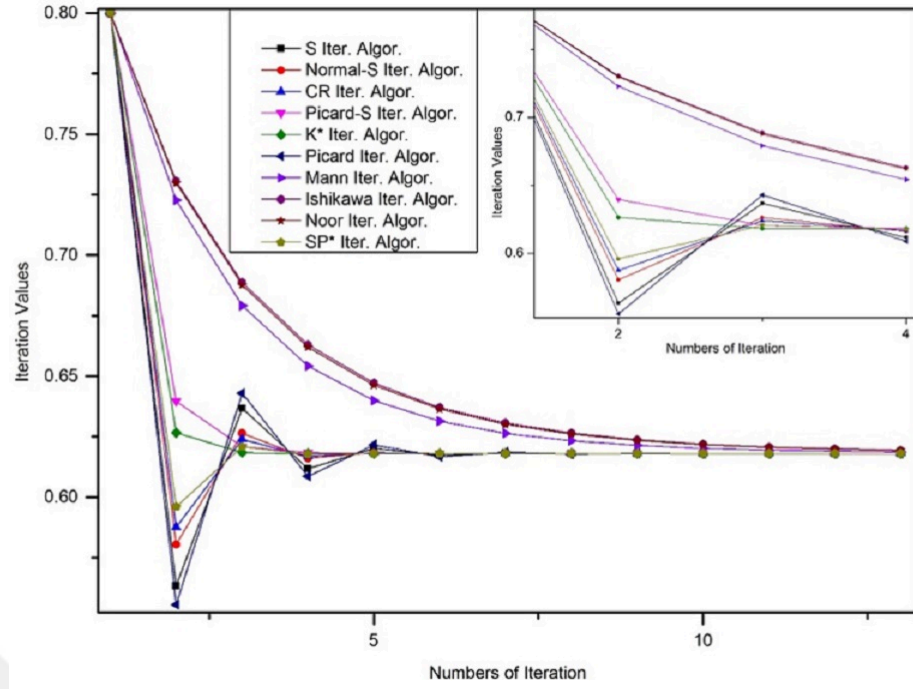
$$0 \leq \frac{2}{5}n(n - 1)$$

eşitsizliği daima doğru olur. Böylece Lemma 3.3' nin tüm şartları sağlanır. Bununla birlikte, kolayca görüleceği üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \alpha_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup t_n$ değerleri mevcut değildir.

Not 7. Şahin' in (Şahin, 2019) çalışmasında Teorem 4.6' nın ispatında kullandığı Lemma 3.3, Teorem 5.13' ün ispatında kullanılmamıştır. Haliyle, Teorem 5.13' in ispatında kullanılan teknik, Şahin tarafından [(Şahin, 2019), Teorem 4.6]' ün ispatında kullanılan teknikten farklıdır.



Şekil 5.1: Örnek 5.1’ deki T dönüşümünün bir yarı kesin büzülebilir dönüşüm olduğunu göstermektedir. Mavi ile gösterilen doğru (3.5) şartının sağ kısmını, kırmızı ile gösterilen eğri ise (3.5) şartının sol kısmını temsil etmektedir.



Şekil 5.2: Örnek 5.1 için farklı iterasyon algoritmalarının yakınsaklık hareketleri

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının beşinci bölümünde Teorem 5.3 de normlu uzaylarda K^* iterasyon algoritmasından elde edilen dizinin yarı kesin büzülebilir dönüşümün sabit noktasına, Teorem 5.4 de hiperbolik uzaylarda M iterasyon algoritmasından elde edilen dizinin büzülebilir tip dönüşümün sabit noktasına kuvvetli yakınsadığı gösterilmiştir. Teorem 5.6 da K^* iterasyon algoritmasının SP^* iterasyon algoritmasından daha hızlı olduğu gösterilmiştir. Teorem 5.9 ile normlu uzaylarda alınan yarı kesin büzülebilir dönüşümün M - kararlı olduğu, Teorem 5.10 ile hiperbolik uzaylarda alınan büzülebilir tip dönüşümün w^2 - kararlı olduğu elde edilmiştir. Teorem 5.11 ve Teorem 5.13 de sabit noktaların veri bağıllığı sonucu elde edilmiştir.

Örnek 5.1 de kesin büzülebilir bir dönüşümün büzülme dönüşümü olmadığı gösterilmiştir. Dördüncü bölümde tanımları verilen iterasyon algoritmalarının Örnek 5.1. de tanımlanan dönüşüm altında yakınsaklık hızları incelenmiştir. Örnek 5.2 de ise Örnek 5.1 de tanımlanan dönüşümün veri bağıllığı incelenmiştir.

Bundan sonraki süreçte, elde ettiğimiz sonuçlar ışığında tezde ele alınan iterasyon algoritmalarının çeşitli modifikasyonlarının, varyasyonel eşitsizlik ve optimizasyon problemlerinin çözümlerine uygulanması yapılabilecektir.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Nazir, T., 2014. A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. *Matematički Vesnik*, 66, 223-234.
- Agarwal, R., O'Regan, D., Sahu, D. R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *Journal Nonlinear Convex Analysis*, 61 (8).
- Ali, F., Ali, J., 2020. Convergence, stability, and data dependence of a new iterative algorithm with an application. *Computational and Applied Mathematics*, 267 (39): doi:10.1007/s40314-020-01316-2.
- Babu, G.V.R., Vara Prasad, K.N.V., 2006. Mann iteration converges faster than Ishikawa iteration for the class of Zamfirescu operators. *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2006, Article ID 49615, 6 pages.
- Banach, S., 1922. Sur les Operations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux Equations Integrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133-181.
- Bayraktar, M., 1992. Fonksiyonel Analiz.
- Beg, I., Latif, A., Minhas, T.Y., 1996. Some fixed point theorems in topological vector spaces. *Demonstr. Math.* 29, 549-555.
- Berinde, V., 2004. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators. *Fixed Point Theory and Application*, 2, 97-105.
- Berinde, V., 2016. On a notion of rapidity of convergence used in the study of fixed point iterative methods. *Creative. Mathematics and Informatics*, 25, 29-40.
- Berinde, V., 2003. Summable almost stability of fixed point iteration procedures. *Carpathian Journal of Mathematics*, 19(2), 81-88.
- Berinde, V., 2002. On the stability of some fixed point procedures. *Buletinul Stiintific al Universitatii Baia Mare* 2002, 18, 7-14.
- Berinde, V., 2007. *Iterative Approximation of Fixed Points*. Springer, Berlin.
- Berinde, V., 2003. On The Approximation of Fixed Points of Weak Contractive Mappings. *Carpathian Journal of Mathematics*, 19(1), 7-22.
- Brezinski, C., 2000. Convergence acceleration during the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 122, 1-21.
- Bridson, M., Haefliger, A., 1999. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer, Berlin.
- Brown, A.L., Page, A., 1970. *Elements of Functional Analysis*.
- Cardinali, T., Rubbioni, P., 2010. A generalization of the Caristi fixed point theorem in metric spaces. *Fixed Point Theory* 11, 3-10.

- Chidume, C.E., Mutangadura, S. A., 2001. An Example on the Mann Iteration Method for Lipschitz Pseudocontractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(8), 2359-2363.
- Chidume, C.E., Olaleru, J. O., 2014. Picard iteration process for a general class of contractive mappings. *J. Niger. Math. Soc.* 33, 19-23.
- Chifu, C., Petruşel, G., 2007. Existence and Data Dependence of Fixed Points and Strict Fixed Points for Contractive-Type Multivalued Operators. *Fixed Point Theory and Applications*, (1), 1-8.
- Chugh, R., Kumar, V., Kumar, S., 2012. Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces. *American Journal of Computational Mathematics*, 2(4), 345-347.
- Curtain, R., Pritchard, A.J., 1977. *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*. Academic Press.
- Derrick, W. R., Nova, L., 1989. Fixed point theorems for discontinuous operators. *Glas. Mat.*, 24, 339-348.
- Doğan, K., Gürsoy, F., Karakaya, V., 2020. Some fixed point results in the generalized convex metric spaces. *TWMS(Turkic World Mathematical Society) Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 10, 11-23.
- Doğan, K., Gürsoy, F., Karakaya, V., Khan, A.R., 2020. Some new results on convergence, stability and data dependence in n -normed spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69, 112-122.
- Ertürk, M., Gürsoy, F., 2019. Some convergence, stability and data dependency results for a Picard-S iteration method of quasi-strictly contractive operator. *Mathematica Bohemica*, 144(1), 69-83.
- Ertürk, M., Khan, A.R., Karakaya, V., Gürsoy, F., 2017. Convergence and data dependence results for hemicontractive operators. *Journal of Nonlinear Convex Anal.*, 18, 697-708.
- Espínola, R., Petruşel, A., 2005. Existence and Data Dependence of Fixed Points for Multivalued Operators on Gauge Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 309(2), 420-432.
- Goebel, K., Reich, S., 1984. *Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings*. Marcel Dekker, New York.
- Gürsoy, F., 2014. Bazı Yeni Sabit Nokta İterasyon Yöntemlerinin Yakınsaklıklarının ve Kararlılıklarının İncelenmesi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 119 sayfa, İstanbul.
- Gürsoy, F., Sahu, D.R., Ansari, Q.H., 2016. S iteration process for variational inclusions and its rate of convergence. *Journal of Nonlinear Convex Analysis*, 17, 1753-1767.

- Gürsoy, F., Eksteen, J.J.A., Khan, A.R., Karakaya, V., 2019. An iterative method and its application to stable inversion. *Soft Computing*, 23(16), 7393-7406.
- Gürsoy, F., Ertürk, M., Khan, A.R., Karakaya, V., 2019. Analytical and numerical aspect of coincidence point of quasi contractive operators. *Publications De l'instut Mathematique*, 105(119), 101-121.
- Gürsoy, F., Ertürk, M., Khan, A.R., Karakaya, V., 2018. Convergence and data dependency of normal-S iterative method for discontinuous operators on Banach space. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 39, 322-345.
- Gürsoy, F., Karakaya, V., Rhoades, B.E., 2014. Some convergence and stability results for the Kirk Multistep and Kirk-SP fixed point iterative algorithms. *Abstract and Applied Analysis*, 11.
- Gürsoy, F., Karakaya, V., 2014. Some convergence and stability results for two new Kirk type hybrid fixed point iterative algorithms. *Journal of Function Spaces*,
- Gürsoy, F., Karakaya, V., 2014. A Picard-S Hybrid Type iteration Method for Solving a Differential Equation with Retarded Argument. *Eprint Arxiv*, 1403.2546, 1-16.
- Gürsoy, F., Khan, A.R., Ertürk, M., Karakaya, V., 2020. Coincidences of nonself operators by a simpler algorithm. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 41, 192-208.
- Gürsoy, F., Khan, A.R., Karakaya, V., 2016. Jungck-Khan Iterative Scheme and Higher Convergence rate. *Int. J. Comput. Math.*, 93, 2092-2105.
- Gürsoy, F., Khan, A.R., Ertürk, M., Karakaya, V., 2019. Weak w^2 -stability and data dependence of Mann iteration method in Hilbert spaces. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físias y Naturales Serie A. Matemáticas* 2019, 113(1), 11-20.
- Gürsoy, F., Khan, A.R., Fukhar-ud-din, H., 2018. Rate of convergence and data dependency of almost Presic contractive operators. *Journal of Nonlinear Convex Analysis*, 19(6), 1069-1081.
- Gürsoy, F., Ertürk, M., Dikmen, M., 2019. Some fixed point results for quasi-strictly contractive operators in hyperbolic spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 20, 2281-2295.
- Hacıoğlu, E., Gürsoy, F., Maldar, S., Atalan, Y., Milanović, G.V., 2021. Iterative approximation of fixed points and applications to two-point second-order boundary value problems and to machine learning. *Applied Numerical Mathematics*, 167(2), 143-172.
- Harder, A.M., Hicks, T.L., 1988. A stable iteration procedure for nonexpansive mappings. *Mathematica Japonica*, 33, 687-692.
- Harder, A.M., Hicks, T.L., 1988. Stability results for fixed point iteration procedures. *Mathematica Japonica*, 33, 693-706.

- Harder, A.M., 1987. Fixed point theory and stability results for fixed points iteration procedures. University of Missouri-Rolla, PhD. Thesis, ABD.
- Hengxiao, Q.I., Tanveer, M., Nazeer, W., Chu, Y., 2020. Fixed Points Results for Fractal Generation of Complex Polynomials Involving Sine Function via Non-Standard Iterations. The Institute of Electrical and Electronics Engineers.
- Hengxiao, Q.I., Tanveer, M., Saleem, M.S., Chu, Y., 2020. Anti Mandelbrot Sets via Jungck-M iteration. The Institute of Electrical and Electronics Engineers.
- Huang, Z., Noor, M.A., 2007. Equivalency of convergence between one-step iteration algorithm and two-step iteration algorithm of variational inclusions for H-monotone mappings. *Comput. Math. Appl.*, 53(10), 1567-1571.
- Imoru, C.O., Olatinwo, M.O., 2003. On the stability of Picard and Mann iteration processes. *Carpathian Journal of Mathematics*, 19(2), 155-160.
- Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(1), 147-150.
- Kakutani, S., 1941. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8, 457-459.
- Karahan, İ., Özdemir, M., 2013. A general iterative method for approximation of fixed points and their applications. *Advances in Fixed Point Theory*, 3, 510 - 526.
- Karakaya, V., Gürsoy, F., Doğan, K., Ertürk, M., 2013. Data dependence results for multistep and CR iterative schemes in the class of contractive-like operators. *Abstract and Applied Analysis*, 63(1).
- Karakaya, V., Gürsoy, F., Doğan, K., Ertürk, M., 2013. Fixed point of a new three-step iteration algorithm under contractive-like operators over normed spaces. *Abstr. Appl. Anal.*, 9 pages.
- Karakaya, V., Gürsoy, F., Ertürk, M., 2016. Some convergence and data dependence results for various fixed point iterative methods. *Kuwait Journal of Science*; 43(1), 112-128.
- Karakaya, V., Gürsoy, F., Ertürk, M., 2014. Comparison of the speed of convergence among various iterative schemes, *arXiv:1402.6080*.
- Karakaya, V., Atalan, Y., Doğan, K., Bouzara, N.E.H., 2017. some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces. *Fixed Point Theory*, 18, 625-640.
- Kadıoğlu, N., Yıldırım, I., 2014. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by a faster iteration process. Department of Mathematics, Faculty of Science, <https://arxiv.org/abs/1402.6530>.
- Khatoon, S., Uddin, I., Baleanu, D., 2020. Approximation of fixed point and its application to fractional differential equation. *J. Appl. Math. Comput.*, 1-19.
- Kohlenbach, U., 2004. Some logical metatheorems with applications in functional analysis. *Trans. Am. Math. Soc.* 357, 89-128.

- Krasnoselskii, M.A., 1955. Two remarks about the method of successive approximations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10, 123-127.
- Kreyszig, E., 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley New York.
- Kumar, V., Hussain, N., Khan, A.R., Gürsoy, F., 2020. Convergence and stability of an iterative algorithm for strongly accretive Lipschitzian operator with applications. *Filomat*, 34(11), 3689-3704.
- Liu, Q., 1990. A convergence theorem of the sequence of Ishikawa iterates for quasi-contractive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 146(2), 301-305.
- Maddox, I.J., 1988. *Elements of Functional Analysis*, CUP Archive.
- Mann, W.R., 1953. Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4, 506-510.
- Markin, J., 1973. Continuous Dependence of Fixed Point Sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 38(3), 545-547.
- Moore, R.E., Cloud, M.J., 2007. *Computational Functional Analysis*. Elsevier.
- Nash, J.F., 1950. Equilibrium points n-person games. *Proceedings of the Rational Academy of Sciences*, 36, 48-49.
- Nash, J.F., 1922. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54, 286-295.
- Neumann, J.V., 1928. Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100, 295-320.
- Noor, M.A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251(1), 217-229.
- Noor, M.A., Noor, K.I., Bnouhachem, A., 2020. Some new iterative methods for solving variational inequalities. *Can. J. Appl. Math.*, 2(2), 1-17.
- Olantiwo, M., 2008. Some stability and strong convergence results for the Jungck-Ishikawa iteration process. *Creative Mathematics and Informatics.*, 17, 33-42.
- Olantiwo, M., 2009. Some Results on The Continuous Dependence of The Fixed Points in Normed Linear Space. *Fixed Point Theory*, 10(1), 151-157.
- Osilike, M.O., 1996. On stability results for fixed point iteration procedures. *Journal of the Nigerian Mathematical Society*, 14-15, 17-29.
- Osilike, M.O., 1995. Stability results for the Ishikawa fixed point iteration procedure. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 26, 937-945.
- Osilike, M.O., Udomene, A., 1999. Short proofs of stability results for fixed point iteration procedures for a class of contractive type mappings. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 30, 1229-1234.

- Ostrowski, A.M., 1967. The round-off stability of iterations. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 47(2), 77-81.
- Picard, E., 1890. Memoire sur la theorie des quations aux derives partielles et la methode des approximations successives. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 4, 145-210.
- Phuengrattana, W., Suantai, S., 2011. On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP iterations for continuous functions on an arbitrary interval. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235 (9), 3006-3014.
- Pugachev, V.S., Sinitsyn, I.N., 1999. Lectures on Functional Analysis and Applications. World Scientific.
- Qing, Y., Rhoades, B.E., 2008. Comments on the rate of convergence between mann and ishikawa iterations applied to zamfirescu operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 387504, 3 pages.
- Rhoades, B.E., 1991. Some fixed point iteration procedures. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 14(1).
- Rhoades, B.E., 1990. Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 21, 1-9.
- Rhoades, B.E., 1993. Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures. II. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 24, 691-703.
- Rus, I.A., Muresan, S., 1998. Data Dependence of The Fixed Points Set of Weakly Picard Operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 43(1), 79-83.
- Rus, I.A., Petruşel, A., Sintamarian, A., 2003. Data Dependence of the Fixed Point Set of Some Multivalued Weakly Picard Operators. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 52(8), 1947-1959.
- Sahu, D.R., 2011. Applications of the S-iteration process to constrained minimization problems and split feasibility problems. *Fixed Point Theory*, 12, 187-204.
- Scherzer, O., 1995. Convergence criteria of iterative methods based on Landweber iteration for solving nonlinear problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 194, 911-933.
- Shehu, Y., Ogbuisi, F.U., 2015. An iterative method for solving split monotone variational inclusion and fixed point problems. Springer, Verlag, Italia.
- Şahin, A., 2019. Some new reults of M-iteration process in hyperbolic spaces. *Carpat. J. Math.*, 35, 221-232.
- Şoltuz, Ş.M., Grosan T., 2008. Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive like operators. *Fixed Point Theory Appl.*, (2008) 1-7.
- Takahashi, W., 1970. A convexity in metric spaces and nonexpansive mappings. *Kodai Math. Semin. Rep.*, 22, 142-149.

- Thakur, D., Thakur, B.S., Postolache, M., 2014. New iteration scheme for numerical reckoning fixed points of nonexpansive mappings. *J. Inequal. Appl.*, (2014), 328.
- Thianwan, S., 2009. Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224(2), 688-695.
- Timiş, I., 2010. On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings. *Annal. Uni. Craiova, Math. Comput. Sci. Series*, 37, 106-114.
- Uddin, I., Ali, J., Gürsoy, F., 2020. Stability and data dependence results for Zamfirescu multi-valued mappings. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 10(3), 702-709.
- Ullah, K., Arshad, M., 2018. New three-step iteration process and fixed point approximation in Banach spaces. *Journal of Linear and Topological Algebra*, 7(2), 87-100.
- Ullah, K., Arshad, M., 2018. Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process. *Filomat* 32(2018), 187-196.
- Urabe, M., 1956. Convergence of numerical iteration in solution of equations. *Journal of Science of the Hiroshima University, Serie A*, 19(3), 479-489.
- Usurelu, G.I., Bejenaru, A., Postolache, M., 2020. Newton-like methods and polynomial-graphic visualization of modified Thakur processes. *Int. J. Comput. Math.*, 1049-1068.
- Włodarczyk, K., 1988. New extension of the Banach contraction principle to locally convex spaces and applications. *Indag. Math. (Proc.)*, 91, 211-221.
- Yu, T.M., Shadid, A.A., Shabbir, K., Shah, N.A., Li, Y.M., 2021. An iteration process for a general class of contractive-like operators: Convergence, stability and polynomial-graphy. *AIMS Mathematics*, 6(7): 6699-6714.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ruken ÇELİK

Eğitim Durumu

Lise : Bursa Kız Lisesi, Türkiye, 2007

Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, Türkiye, 2013

Yüksek Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı,
Türkiye, 2015

Doktora : İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, Türkiye, 2022

Yayınları

Şimşek, N., Çelik, R., 2022. Some Convergence, Stability and Data Dependence Results for K^* Iterative Method of Quasi-Strictly Contractive Mappings. Turkish Journal of Mathematics, 46(7), 2819–2833.