



**T.C. İSTANBUL T CARET
ÜNİVERSİTESİ**

FEN B LİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GREINER OPERATÖRÜ İLE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ HIZLI
DİFÜZYON DENKLEMİ VE BAZI İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ**

Ahmet Uğur UTKU

**Danışman
Doę. Dr. Abdullah YENER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL-2022**

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ahmet Uğur UTKU tarafından hazırlanan "**Greiner Operatörü ile İlişkilendirilmiş Hızlı Difüzyon Denklemi ve Bazı İntegral Eşitsizlikleri**" adlı tez çalışması 11/11/2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman

Doç. Dr. Abdullah YENER
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. İsmail KÖMBE
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi

Prof. Dr. İbrahim KIRAT
İstanbul Teknik Üniversitesi

Onay Tarihi: 28.12.2022

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünün 28.12.2022 tarih ve 2022/370 numaralı Yönetim Kurulu Kararının 6. maddesi gereğince, ders yüklerini ve tez yükümlülüğünü yerine getirdiği belirlenen "Ahmet Uğur UTKU" adlı öğrencinin mezun olmasına oy birliği ile karar verilmiştir.

Prof. Dr. Doğan KAYA
Enstitü Müdürü

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

28.12.2022

Ahmet Uğur UTKU

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	4
3. ÖN BİLGİLER	9
3.1. Fonksiyon Uzayları	9
3.2. Green Özdeşlikleri ve İntegrasyon Formülleri.....	13
3.3. Eşitsizlikler	14
4. GREINER OPERATÖRÜ	16
4.1. Temel Tanım ve Kavramlar	16
4.2. Diferansiyel Hesap	17
4.3. İntegral Hesap.....	19
5. GREINER VEKTÖR ALANLARINDA HIZLI DİFÜZYON DENKLEMİ	22
5.1 Pozitif Çözümün Yokluğu	25
6. GREINER OPERATÖRÜ İLE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ AĞIRLIKLİ HARDY EŞİTSİZLİKLERİ.....	29
6.1 Giriş.....	29
6.2 Bazı Ağırlıklı Hardy Eşitsizlikleri	31
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	39

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GREINER OPERATÖRÜ İLE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ HIZLI DİFÜZYON DENKLEMİ VE BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Ahmet Uğur UTKU

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Abdullah YENER
2022, 39 sayfa

Bu tezin temel amacı aşağıdaki doğrusal olmayan hızlı difüzyon denkleminin, Greiner vektör alanlarında pozitif çözümünün yokluğunu araştırmaktır.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) + V(\omega) u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0 & \Omega. \end{cases}$$

Burada $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve Ω , Greiner vektör alanında düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölgedir. ∇_k ise Greiner vektör alanlarındaki gradyan vektörüdür.

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılmasında ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizliklerinin rolü çok önemli olup tezin diğer amacı, Greiner operatörüne ilişkilendirilmiş bazı ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizliklerin elde edilmesidir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan parabolik kısmi diferansiyel denklemler, Greiner operatör, Hardy eşitsizliği, hızlı difüzyon denklemi, pozitif çözümün yokluğu.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

FAST DIFFUSION EQUATION AND SOME INTEGRAL INEQUALITIES ASSOCIATED WITH THE GREINER OPERATOR

Ahmet Uğur UTKU

Istanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Abdullah YENER
2022, 39 pages

The main goal of this thesis is to investigate nonexistence of positive solutions to the following nonlinear fast diffusion equation:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) + V(\omega) u^m & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Here, $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$ and ∇_k represents gradient vector in a bounded domain Ω with smooth boundary in Greiner vector fields.

Importance of weighted L^p Hardy type inequalities in the analysis of the solutions of partial differential equations is well known. From this point of view, the other goal of this thesis is to obtain some weighted L^p Hardy type inequalities associated with the Greiner operator.

Keywords: Fast diffusion equation, Hardy inequality, Greiner operator, nonexistence of positive solutions, nonlinear parabolic equations.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusuna beni yönlendiren ve her aşamasında bana rehberlik eden danışman hocam Sayın Doc. Dr. Abdullah YENER'e teşekkürlerimi sunarım.

Savunmamda bulunan Prof. Dr. İsmail KÖMBE ve Prof. Dr. İbrahim KIRAT hocalarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ahmet Uğur UTKU
İSTANBUL, 2022



SİMGELER VE KISALTMALAR

∇_k	Greiner vektör alanında gradyan operatörü
Δ_k	Greiner vektör alanında Laplace operatörü
$B_R(x_0)$	Greiner vektör alanında x_0 merkezli R yarıçaplı açık yuvar
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
∇	Öklid uzayında tanımlı gradyan operatörü
Δ	Öklid uzayında tanımlı Laplace operatörü
$B(x_0, R)$	Öklid uzayında x_0 merkezli R yarıçaplı açık yuvar
$L^p(\Omega)$	Ω bölgesinde p. dereceden türevlenebilir fonksiyonların uzayı
$L^p_{loc}(\Omega)$	Ω bölgesinde p-yerel integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$\bar{\Omega}$	Ω bölgesinin kapanışı $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
$ \Omega $	Ω bölgesinin Lebesgue ölçüsü
$C(\Omega)$	Ω bölgesinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
S_Q	Q -boyutlu $B(0,1)$ birim yuvarının yüzey alanı
$W^{k,p}$	Sobolev uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	Test fonksiyonları uzayı
$W_0^{k,p}$	$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{k,p}$ uzayındaki kapanışı

1. GİRİŞ

Doğa bilimlerinde ve bu bilim dallarının uğraştıkları birçok problemin matematiksel modelinde ve varsa çözümünde mutlaka diferansiyel denklemler özellikle de Kısmi Diferansiyel Denklemler (KDD) kullanılır. Bu denklemler, doğrusal veya doğrusal olmayan olmak üzere iki farklı durumda incelenmiştir. Bu tezin konusu olan Hızlı Difüzyon Denklemi (HDD) ise doğrusal olmayan tipte bir parabolik diferansiyel denklemdir. Ek olarak evolüsyon denklemdir. Evolüsyon denklemleri, kısmi diferansiyel denklemlerin $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uzayı ve t zaman değişkenini içeren formudur. Bu KDD formunun en yaygın örnekleri ise ısı denklemleridir. Bu denklemler büyük çoğunlukla ısı transferinde doğrusal olmayan difüzyon denklemleri olarak ortaya çıkar. Evolüsyon denklemlerinin doğrusal olmayanlarını, doğrusal olanlardan ayıran temel fark ise tekilliğin varlığıdır. Bu tarz denklemler için tekilliğin varlığı demek, t zaman değişkeninin belirli ve sonlu bir $T > 0$ limitine yaklaştığında diğer değişkenlerin de sonsuza yaklaşması durumudur. Dahası; çözüm, sonlu zaman aralığında sonsuz olur. Bu duruma çözümün patlaması denir.

En temel doğrusal olmayan difüzyon modeli aşağıdaki parabolik denklemdir:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u^m, & u &\geq 0, \\ t &> 0, & \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Bu denklemde $\Delta u^m = \text{div}(\nabla u^m) = \text{div}(mu^{m-1}\nabla u)$ olduğundan difüzyon, $D(u) = mu^{m-1}$ ifadesi ile şekillenir. Bu ifadede eğer

- i) $m = 1$ ve $D(u) = 1$ ise difüzyon sabittir ve denklem lineer ısı denklemdir.
- ii) $m > 1$ ve $u \rightarrow 0$ ise $D(u) = mu^{m-1} \rightarrow 0$ olacağından denklem yavaş difüzyon denklemi yani gözenekli ortam denklemi (GOD) olacaktır.
- iii) $0 < m < 1$ ise doğrusal olmayan evolüsyon denkleminin dönüşeceği form tezin konusu olan hızlı difüzyon denklemdir.

(1.1) evolüsyon denklemi için önemli genişlemeler, denklemin sağ tarafına ek bir terim eklenmesiyle ortaya çıkar.

$$u_t = \Delta u^m + F(x, t)$$

denkleminin çözümlerinin davranışları çok sayıda araştırmacının ilgisini çekmiş, bu denklemlerin pozitif çözümlerinin yokluğu ne tür durumda ortaya çıktığı irdelenmiştir. Difüzyon problemlerinde; u çözümünün sıcaklık, yükseklik veya yoğunluk gibi fiziksel bir niceliği temsil ettiğinden sadece pozitif çözümleri ele alınmaktadır (Vazquez, 2000).

Tüm bu bilgilerden elde edilen çıkarım, hem potansiyel hem de kaynak terim içeren çok daha genel bir problemin pozitif çözümünün hangi şartlara bağlı olduğu sorusudur. Bu tezin ilk gayesi, $0 < m < 1$ durumu için

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) + V(\omega) u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

şeklinde verilen doğrusal olmayan hızlı difüzyon probleminin Greiner vektör alanlarında pozitif çözümünün yokluğunu incelemektir. Burada, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve Ω ise Greiner vektör alanında düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölgedir.

$\mathbb{R}^n$ ’de L^p Hardy eşitsizliği, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < p < n$ olmak üzere, aşağıdaki gibidir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \geq \left(\frac{n-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi|^p}{|x|^p} dx.$$

Buradaki $\left(\frac{n-p}{p} \right)^p$ sabiti en iyi sabittir (Shen, 1980).

Tekil potansiyele sahip doğrusal veya doğrusal olmayan bazı kısmi diferansiyel denklemlerdeki çözümlerin irdelenmesi için Hardy eşitsizlikleri son derece önemlidir. Referans olarak (Balinsky vd., 2015; Ghoussoub ve Moradifam, 2013; Kufner ve Persson, 2003) kaynakları detaylıca incelenmelidir. Bu yüzden bu tez çalışmasının diğer bir amacı ise ağırlıklı Hardy tipi eşitsizlikler elde etmektir. Elde edilen radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip L^p Hardy tipi eşitsizlikler şu şekildedir:

$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $p > 1$ olsun. O halde,

$$\int_{\Omega} \cos h^\alpha y_1 |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq (p-1) \int_{\Omega} \frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^p \log^{p-1} x_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği $\Omega = \{\omega = (x, y, l) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x_1 > 1\}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken;

$$\int_{\Omega} e^{-px_1} |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq \int_{\Omega} e^{-px_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği de $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı bir bölge olmak üzere geçerlidir.

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünün ardından Literatür Özeti başlığı altında ele alınan konu ve denklemler ile ilgili yapılmış olan çalışmalar özetlenecektir. Ön bilgiler olarak adlandırılan üçüncü bölümde, tez içerisinde kullanılacak tanımlar, teoremler ve eşitsizlikler verilecektir. Dördüncü bölümde ise Greiner operatörü tanıtılacak ve temel özellikleri ifade edilecektir. Beşinci bölümde ise Greiner vektör alanlarında tezin konusu olan hızlı difüzyon probleminin pozitif çözümünün yokluğu analiz edilecektir. Altıncı bölümde Greiner operatörü ile ilişkilendirilmiş Hardy eşitsizlikleri ile ilgili çalışmalardan bahsedilecektir. Yedinci ve son bölüm olan Sonuç ve Öneriler kısmında ise tezin kısa bir özeti yapılacaktır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Tezin bu bölümünde Öklid uzayında ve Greiner vektör alanlarında hızlı difüzyon denklemleri ve Hardy tipi eşitsizlikler ile yapılmış bazı çalışmalar verilecektir.

İlk olarak Baras ve Goldstein (1984), aşağıda ifade edilen Dirichlet sınır koşulu ile verilmiş lineer parabolik problemi Öklid uzayında ele almıştır.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{c}{|x|^2} u, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Bu problemde $c > C_h := \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ ise pozitif çözüm yoktur. Pozitif çözümün varlığı ise ancak $c \leq C_h$ şartı ile mümkündür. Buradaki $C_h = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ sabiti L^2 Hardy eşitsizliğindeki en iyi sabittir. Öklid uzayındaki L^2 Hardy eşitsizliği şu şekilde ifade edilir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi(x)|^2 dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|^2} dx, \quad n \geq 3, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Daha sonra Cabre ve Martel (1999) yukarıda ifade edilen çalışmanın genel $V(x)$ potansiyelli halini ele almıştır. Açıkça ifade etmek gerekirse ele alınan problem şu şekildedir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega. \end{cases}$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $V \in L_{loc}^1(\Omega)$ şeklindedir.

Öte yandan, Garcia ve Peral (1998), (2.1) problemini farklı bir L^p tipi potansiyelli şu şeklini incelemişlerdir: Ω sınırlı bir bölge ve $0 \in \Omega$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{c}{|x|^{p-1}} u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega. \end{cases}$$

Burada, eğer $c > \left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ ise problemin pozitif çözümü yoktur; eğer $c \leq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ ise problemin pozitif çözümleri vardır. Buradaki $c = \left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ sabiti L^p Hardy eşitsizliğindeki en iyi sabittir. n -boyutlu Öklid uzayındaki L^p Hardy eşitsizliği herhangi $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $1 < p < n$ değeri için şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi(x)|^p dx \\ & \geq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^p} dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ek olarak, $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir (Shen, 1980).

Diğer yandan, Goldstein ve Kömbe (2003) yılındaki çalışmalarında lineer olmayan, dejenere parabolik kısmi diferansiyel problemin varyasyonel yöntem ile pozitif çözümünün yokluğunu incelemiştir. Problem şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(u^m) + V(x)u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.3)$$

Burada $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve Ω , $\mathbb{R}^n$ 'de düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölgedir.

Daha sonra, Goldstein vd. (2005) lineer olmayan tekil potansiyelli ve kritik üsse sahip

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|x|^{-2\lambda} \nabla u^m) + V(x)u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega \end{cases}$$

parabolik probleminin pozitif çözümünün yokluğunu araştırmışlardır. Burada $0 < m < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Kömbe (2006) yılındaki yaptığı çalışmayla (2.3) lineer olmayan hızlı difüzyon problemini Greiner vektör alanlarına genişletmiştir. Açıkça ifade etmek gerekirse bu problem şu şekilde verilir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_k u^m + V(\omega)u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega, \\ u(\omega, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınırlara sahip bir bölge, $0 < m < 1$ ve $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ olmak üzere, $k \geq 1$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2ky_j|z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l} \quad \text{ile} \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2ky_j|z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l}$$

ifadeleri $\Delta_k = \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2)$ Greiner operatöründe bulunan vektör alanlarını temsil etmektedir. $\omega = (z, l) = (x, y, l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ Greiner vektör alanlarında jenerik bir nokta ve $|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$ dir.

Daha sonra, Ahmetolan (2008) aşağıdaki doğrusal olmayan tekil katsayılı parabolik problemin Greiner vektör alanı üzerindeki pozitif çözümünün davranışlarını incelemiştir.

$$\begin{cases} \frac{\partial u^q}{\partial t} = \nabla_k \cdot (|\omega|^{-2\gamma} \nabla u^m) + V(\omega, t)u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega. \end{cases}$$

Burada $0 < m < 1$, $V(\omega, t) \in L^1_{loc}(\Omega \times (0, T))$ 'dir. Burada ∇_k Greiner vektör alanlarında gradyan operatörü olup $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

Tüm bu çalışmalardan hareketle ele alınan ve bu tezin ana konusu olan hızlı difüzyon problemi şu şekildedir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) + V(\omega) u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega. \end{cases}$$

Burada, $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$ olmak üzere; Ω , Greiner vektör alanında düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölgeyi temsil etmektedir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılmasında, özellikle de doğrusal olmayan tekil potansiyele sahip bazılarının çözümlerinin araştırılmasında Hardy eşitsizliklerin rolü oldukça kritiktir. (2.2) ile verilen n -boyutlu Öklid uzayındaki L^p Hardy eşitsizliğinin Greiner vektör alanlarındaki analogu Zhang ve Niu (2003) tarafından elde edilmiş olup bu eşitsizlik şöyledir: Herhangi $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{(0, 0)\})$ fonksiyonu ve $1 < p < Q$ değerleri için

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} |\nabla_k \phi|^p dz dl \geq \left(\frac{Q-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{p(2k-1)} \left(\frac{|\phi|}{\rho} \right)^p dz dl$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada Q , Greiner vektör alanlarındaki homojen boyut olup ρ ise

$$\rho = \rho(z, l) = (|z|^{4k} + l^2)^{1/4k}, \quad k \geq 1$$

şeklinde tanımlanan norm fonksiyonudur.

Diğer yandan, Lian (2013) tarafından

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{|z|^\beta}{\rho^{\alpha+\beta}} |\nabla_k \phi|^p dz dl \geq \left(\frac{Q+ap-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{|z|^\beta}{\rho^{\alpha+\beta}} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{p(2k-1)} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dz dl$$

ağırlıklı Hardy eşitsizliğinin $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ için geçerli olduğu ispatlanmıştır. Burada $1 < p < Q - \alpha$ ve $\beta + 2n + (p - 1)(2k - 1) > 0$ 'dır. Ayrıca, eşitsizlikteki $\left(\frac{Q+ap-p}{p}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir.

Daha sonra, Ahmetolan ve Kömbe (2016) tarafından iki ağırlıklı Hardy eşitsizlikleri incelenmiştir. Ayrıca, Yener (2018) yılında Greiner vektör alanlarında genel ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizlikler elde etmek için kullanılan yeni ve etkili bir yöntem tanıtmıştır.

Bu tezde ayrıca yukarıda bahsedilen çalışmalardan faydalanılarak radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip L^p Hardy tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu eşitsizlikler şu şekildedir: $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $p > 1$ olsun. O halde,

$$\int_{\Omega} \cos h^\alpha y_1 |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq (p - 1) \int_{\Omega} \frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^p \log^{p-1} x_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği $\Omega = \{\omega = (x, y, l) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x_1 > 1\}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken;

$$\int_{\Omega} e^{-px_1} |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq \int_{\Omega} e^{-px_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği de $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı bir bölge olmak üzere geçerlidir.

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olacak bazı tanım, teorem ve eşitsizlikler verilecektir. Detaylı bilgi için (Adams, 1975; Evans, 2002) kaynakları incelenmelidir.

3.1 Fonksiyon Uzayları

$\mathbb{R}^n$, n -boyutlu Öklid uzayı ve Ω bu uzayda basit bağlantılı bir açık küme olsun. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ negatif olmayan α_i tamsayılarının n bileşenlisi ise α çoklu indis denir.

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ise

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

olur. $1 \leq i \leq n$ için $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ise

$$D^\alpha = \prod_{i=1}^n D_i^{\alpha_i} = \frac{D^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \partial x_2^{\alpha_2}, \dots, \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$|\alpha|$. mertebeden diferansiyel operatör belirtir. Ayrıca bir $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun desteği şöyle tanımlanır:

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Eğer $\text{supp } u$ kompakt alt küme ise u fonksiyonu kompakt desteğe sahiptir denir. Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ sınıflarına ait fonksiyonların

oluşturduğu uzaylar sırasıyla $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ ile ifade edilir. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına test fonksiyonu adı verilir (Adams, 1975).

Tanım 3.1 L^p uzayı

Bir önermenin doğru olmadığı noktaların kümesi sıfır ölçülü bir küme ise ölçüsü sıfır olan bir küme tarafından kapsanıyorsa bu önerme hemen hemen her yerde doğrudur denir ve h.h.h. şeklinde kısaltılır.

$\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilir bir küme ve $0 < p < \infty$ olsun. Ω üzerinde ölçülebilir olan ve aşağıdaki şartı da sağlayan

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty$$

$[u] := \{v: u = v \text{ h.h.h. } x \in Q\}$ formundaki denklik sınıfından oluşan kümeye p . kuvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ ile gösterilir. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p}$$

normu ile $L^p(\Omega)$ bir Banach uzayıdır (Adams, 1975).

Tanım 3.2

Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için h.h.h. $|u| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa bu u fonksiyonu h.h.h. sınırlıdır denir. Böyle K sabitlerinin en büyük alt sınırına ise u 'nun Ω bölgesindeki esas supremumu denir ve $\text{esssup}_{\Omega} |u|$ şeklinde ifade edilir (Adams, 1975).

Tanım 3.3

Ω bölgesinde reel değerli, ölçülebilir, h.h.h. sınırlı olan fonksiyonların denklik sınıflarının oluşturduğu uzaya ise özde sınırlı fonksiyonlar uzayı denir ve $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $L^\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \text{esssup}_\Omega |u|$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır (Adams, 1975).

Tanım 3.4

$\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de açık bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Ω bölgesinin her kompakt K alt kümesinde

$$\int_\Omega |u|^p dx$$

integrali var ve sonlu ise bu u fonksiyonuna p-yerel integrallenebilir fonksiyon denir ve bu fonksiyonların uzayı $L_{loc}^p(\Omega)$ ile gösterilir (Adams, 1975).

Tanım 3.5

Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için pozitif ve yerel integrallenebilir olan bir α fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu adı verilir. $\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de açık bir bölge, $1 \leq p < \infty$ ve α ağırlık fonksiyonu olsun.

$$\int_\Omega \alpha |u|^p dx < \infty$$

şartını sağlayan ve ölçülebilir u fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve $L_\alpha^p(\Omega)$ sembolü ile gösterilir. Bu uzayda norm

$$\|u\|_{L^p_\alpha(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \alpha |u|^p dx \right)^{1/p}$$

olarak tanımlanır. $L^p_\alpha(\Omega)$ uzayı yukarıdaki norm ile bir Banach uzayıdır (Adams, 1975).

Tanım 3.6

α çoklu indis ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Eğer $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^\alpha \int_{\Omega} v \phi dx$$

ifadesini gerçekleyen bir $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu var ise v ' ye u 'nun α . mertebeden zayıf türevi denir ve $v = D^\alpha u$ ile gösterilir.

Tanım 3.7

$\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. k negatif olmayan herhangi bir tamsayı olmak üzere,

$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq k ; D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$ olarak tanımlanmış ifadeye Sobolev uzayı denir. Bu uzay

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p \leq \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{essup}_{\Omega} |D^\alpha u|^p, & p = \infty \end{cases}$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır.

$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{k,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{k,p}(\Omega)$ ile gösterilir (Edmund ve Evans, 1987).

Teorem 3.1

E ölçülebilir bir küme olmak üzere (u_n) , negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E u_n dx \geq \int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n dx$$

özelligi sağlanır (Adams, 1975).

Teorem 3.2

E ölçülebilir bir küme ve (u_n) , negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. Eğer h.h.h. $x \in E$ için (u_n) u fonksiyonuna yakınsak ise aşağıdaki ifadeler eşittir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E u_n dx = \int_E u dx$$

(Adams, 1975).

Teorem 3.3

E ölçülebilir bir küme ve (u_n) , E üzerinde u fonksiyonuna h.h.h. yakınsayan Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların dizisi olsun. Eğer h.h.h. $x \in E$ için $|u_n| \leq v$ olacak şekilde Lebesgue integrallenebilir bir v fonksiyonu varsa u da Lebesgue integrallenebilirdir ve aşağıdaki eşitlik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E u_n dx = \int_E u dx$$

sağlanır (Adams, 1975).

3.2 Green Özdeşlikleri ve İntegrasyon Formülleri

Ω , $\mathbb{R}^n$ uzayında açık, sınırlı bir bölge ve $k = 1, 2, \dots$ olsun. $B(x_0, R)$, x_0 merkezli R yarıçaplı bir yuvar olsun ve eğer her bir $x_0 \in \partial\Omega$ için

$$\Omega \cap B(x_0, R) = \{x \in B(x_0, R) : x_n > u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$$

olacak şekilde bir R sayısı ve C^k sınıfından bir $u: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa $\partial\Omega$ sınırı C^k sınıfından, her bir $k \in \mathbb{N}$ değeri için $\partial\Omega$ sınırı C^k sınıfına ait ise C^∞ sınıfındandır denir. Eğer $\partial\Omega$ sınırı, C^1 sınıfından ise bu sınırı dış yönlü birim normal vektörü $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_i, \dots, \eta_n)$ olarak tanımlıdır. $u \in C^1(\bar{\Omega})$ olmak üzere, $\eta \cdot \nabla u$ ifadesine u 'nun dış yönlü normal türevi denir ve $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ile gösterilir. Ek olarak $\partial\Omega$ sınırının yüzey alan bileşeni dS ile gösterilir.

Teorem 3.4

Ω , $\mathbb{R}^n$ uzayında açık ve sınırlı bir bölge olsun. Ayrıca $\partial\Omega$ sınırı da C^1 sınıfına ait olsun. $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ise $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \eta_i dS$$

olur (Evans, 2002).

Teorem 3.5

Ω , $\mathbb{R}^n$ uzayında açık, sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırı da C^1 sınıfına ait olsun. Bu durumda, her $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ vektör alanı için

$$\int_{\Omega} \text{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta dS$$

olur (Evans, 2002).

Teorem 3.6

Ω , $\mathbb{R}^n$ uzayında açık, sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırı da C^1 sınıfına ait olsun. Ayrıca $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} i) \quad & \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS, \\ ii) \quad & \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} u dS - \int_{\Omega} u \Delta v dx, \\ iii) \quad & \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) dS, \\ iv) \quad & \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} u dS - \int_{\Omega} u \Delta u dx \end{aligned}$$

formüllerinden söz edilir (Evans, 2002).

3.3 Eşitsizlikler

Bu bölümde ise tezin geri kalanında kullanılacak bazı önemli eşitsizlikler teorem halinde ifade edilecektir.

Teorem 3.7

$x, y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

eşitsizliği geçerlidir (Evans, 2002).

Teorem 3.8

$\varepsilon > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Buna göre

$$|xy| = \varepsilon x^p + c(\varepsilon) y^q$$

eşitliği geçerlidir (Evans, 2002).

Teorem 3.9

Ω , $\mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge, $p \geq 1$, $q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $u \in L^p(\Omega)$ ve $v \in L^q(\Omega)$ ise $uv \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |v|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir (Evans, 2002).

$p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği adı verilir.

Teorem 3.10

$1 < p < n$ olmak üzere, her $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{n-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx$$

olur. Ek olarak, $\left(\frac{n-p}{p} \right)^p$ pozitif sabiti en iyi sabittir (Azorero ve Alonso, 1998).

Teorem 3.11

$\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < p < n + \alpha$ olmak üzere, her $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |\nabla u|^p \geq \left(\frac{n + \alpha - p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-p} |u|^p dx$$

eşitsizliği gerçekleşir (Balinsky vd., 2015).

4. GREINER OPERATÖRÜ

4.1 Temel Tanım ve Kavramlar

Tezin bu bölümünde, Greiner operatörü ile ilgili temel tanım, teorem, önemli gösterimler ve yapılar anlatılacaktır. Detaylı bilgi için (Kömbe, 2006; Yener, 2018) referansları incelenmelidir.

Greiner vektör alanlarında bir nokta şu formdadır: $n \geq 1$ olmak üzere,

$$\omega = (z, l) = (x, y, l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Δ_k Greiner operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2). \quad (4.1)$$

Buradaki

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2ky_j|z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2ky_j|z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l} \quad (4.2)$$

vektör alanlarına Greiner vektör alanları denir. Ayrıca, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$, $l \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ 'dir. $k = 1$ durumunda Δ_k operatörü H^n Heisenberg grubu üzerinde tanımlı Δ_{H^n} alt-Laplace operatörüne indirgenir. Δ_k Greiner operatörünün açık halde ifadesi şu şekildedir:

$$\Delta_k = \Delta_z + 4k^2|z|^{2k-2} \frac{\partial^2}{\partial l^2} + 4k|z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l} T.$$

Buradaki $\Delta_z = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right)$ ifadesi $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ değişkenine göre Laplace operatörünü belirtmektedir ve ayrıca

$$T = \sum_{j=1}^n \left(y_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

olarak ifade edilir. Detaylı bilgi için (Beals vd., 1986; Greiner, 1979) çalışmaları incelenmelidir.

Δ_k operatörü $\mathbb{R}^{2n+1}$ 'deki her bir nokta için $2n + 1$ boyutlu bir vektör alanı oluşturur. (4.2) vektör alanları yardımı ile Greiner gradyan vektörü şu şekilde verilir:

$$\nabla_k = (X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n).$$

Diğer yandan,

$$\delta_\lambda = (z, l) = (\lambda z, \lambda^{2k} l), \quad \lambda > 0 \quad (4.3)$$

dilatasyon dönüşümü, $\mathbb{R}^{2n+1}$ 'deki bir cismin şeklini değiştirmeyecek biçimde daraltma ya da genişletme işini yapan dönüşümdür. Değişkenlerin dönüşümü şu sonucu verir:

$$d\delta_\lambda(z, l) = \lambda^Q dz dl = \lambda^Q d\omega.$$

Burada $Q = 2n + 2k$ olup δ_λ fonksiyonuna göre homojen boyuta sahiptir. Greiner vektör alanında norm fonksiyonu şu şekildedir:

$$\rho = \rho(z, l) = (|z|^{4k} + l^2)^{1/4k}.$$

Burada $|\cdot|$ standart Öklid normunu ifade etmek üzere $|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$ şeklindedir. Norm fonksiyonu olan ρ , Δ_k alt-eliptik operatörünün temel çözümüyle yakın ilişkilidir ve daha fazla bilgi için (Niu, vd., 2003) incelenmelidir.

4.2 Diferansiyel Hesap

Tezin bu bölümünde Greiner operatöründe diferansiyel hesapla ilgilenilecektir. Şimdi hesaplamalarda kullanılacak olan $\mathbb{R}^{2n+1}$ 'deki bazı önemli özdeşlikler verilecektir.

ρ norm fonksiyonunun birinci türevi şu şekildedir:

$$\nabla_k \rho = \frac{|z|^{2k-2}}{\rho^{4k-1}} (x|z|^{2k} + y_l, y|z|^{2k} - xl). \quad (4.4)$$

Ek olarak, (4.4) gradyan fonksiyonunun normu:

$$|\nabla_k \rho| = \frac{|z|^{2k-2}}{\rho^{4k-1}}$$

şeklinde elde edilir (Yener, 2018).

Önerme 4.1

$u: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir radyal fonksiyon ise her $\omega \in \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ için

$$|\nabla_k u(\rho)|^2 = \left(\frac{r^{2k-1}}{\rho^{2k-1}} u'(\rho) \right)^2$$

eşitliği geçerlidir.

Kanıt 4.1

$\mathbb{R}^{2n+1}$ Greiner operatöründe gerekli türev işlemleri ile, her $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$X_j u(\rho) = \frac{\partial u(\rho)}{\partial x_j} + 2ky_j |z|^{2k-2} \frac{\partial u(\rho)}{\partial l} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} + 2ky_j |z|^{2k-2} \frac{\partial \rho}{\partial l} \right) u'(\rho),$$

$$Y_j u(\rho) = \frac{\partial u(\rho)}{\partial y_j} - 2kx_j |z|^{2k-2} \frac{\partial u(\rho)}{\partial l} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial y_j} - 2kx_j |z|^{2k-2} \frac{\partial \rho}{\partial l} \right) u'(\rho)$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial l} &= \frac{1}{4k} (|z|^{4k} + l^2)^{\frac{1}{4k}-1} 2l = \frac{l}{2k\rho^{4k-1}} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_j} &= (|z|^{4k} + l^2)^{\frac{1}{4k}-1} |z|^{4k-1} \frac{x_j}{|z|} = \frac{r^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} x_j \\ \frac{\partial \rho}{\partial y_j} &= (|z|^{4k} + l^2)^{\frac{1}{4k}-1} \frac{y_j}{|z|^{4k-1}} = \frac{r^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} y_j\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial x_j} |z| = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_j = \frac{x_j}{|z|}$$

kısmi türevleri şeklinde hesaplanmaktadır. Bu ifadeler yerlerine yazıldığında

$$X_j u(\rho) = \frac{r^{2k-2}l}{\rho^{4k-1}} (x_j r^{2k} + y_j l) u'(\rho)$$

ve

$$Y_j u(\rho) = \frac{r^{2k-2}l}{\rho^{4k-1}} (y_j r^{2k} - x_j l) u'(\rho)$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}|\nabla_k u(\rho)|^2 &= \nabla_k u(\rho) \cdot \nabla_k u(\rho) \\ &= \sum_{i=1}^n (|X_i u(\rho)|^2 + |Y_i u(\rho)|^2) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\left| \frac{r^{2k-2}l}{\rho^{4k-1}} (x_j r^{2k} + y_j l) \right|^2 + \left| \frac{r^{2k-2}l}{\rho^{4k-1}} (y_j r^{2k} - x_j l) \right|^2 \right) (u'(\rho))^2 \\ &= \left(\frac{r^{2k-1}}{\rho^{2k-1}} u'(\rho) \right)^2\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilmiş olur.

4.3 İntegral Hesap

Tezin bu alt bölümünde, Greiner operatöründeki bazı radyal fonksiyonların integralini hesaplayabilmek için (Niu P. vd, 2010) tarafından tanıtılan küresel dönüşümler verilecektir.

$B_R(0) = \{\omega \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \rho(\omega) < R\}$, $\partial B_R(0) := \{\omega \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \rho(\omega) = R\}$ olarak belirlensin ve $\Omega := B_{R_2} \setminus \overline{B_{R_1}}$, $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ olarak ifade edilmiş bir halka olsun. Ω halkası üzerinde tanımlı herhangi bir

$$\omega = (z, l) = (x, y, l) := \Phi(\rho, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n-1})$$

noktasının küresel koordinatlardaki formu şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \sin^{\frac{1}{2k}} \theta \cos \theta_1, \\ y_1 &= \rho \sin^{\frac{1}{2k}} \theta \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_2 &= \rho \sin^{\frac{1}{2k}} \theta \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ y_2 &= \rho \sin^{\frac{1}{2k}} \theta \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4, \\ &\vdots \\ x_n &= \rho \sin^{\frac{1}{2k}} \theta \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{2n-3} \sin \theta_{2n-2} \cos \theta_{2n-1}, \\ y_n &= \rho \sin^{\frac{1}{2k}} \theta \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{2n-3} \sin \theta_{2n-2} \sin \theta_{2n-1}, \\ l &= \rho^{2k} \cos \theta. \end{aligned}$$

Burada, $j = 1, 2, \dots, 2n - 2$ için $\theta_j \in (0, \pi)$ ve $\theta_{2n-1} \in (0, 2\pi)$ olup $R_1 < \rho < R_2$ şeklindedir. Yukarıda tanımlanmış küresel dönüşümlerden

$$r^n = \rho^n (\sin \theta)^{p/2k}, \quad p > 1$$

eşitliği elde edilebilir ve küresel koordinatlardaki $\rho, \theta, \theta_1, \dots, \theta_{2n-1}$ değişkenleri,

$$\begin{aligned}
\rho &= (r^4 + l^2)^{1/4}, \\
\theta &= \arcsin\left(\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\
\theta_1 &= \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right), \\
&\vdots \\
\theta_{2n-2} &= \arccos\left(\frac{y_{n-1}}{r \prod_{j=1}^{2n-3} \sin \theta_j}\right), \\
\theta_{2n-1} &= \arccos\left(\frac{x_{2n-2}}{r \prod_{j=1}^{2n-2} \sin \theta_j}\right),
\end{aligned}$$

şeklinde açık formda ifade edilir. Ayrıca,

$$|J(\Phi)| = \rho^{Q-1} \sin^{\frac{n-k}{k}} \theta \sin^{2n-2} \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{2n-3} \sin^2 \theta_{2n-2}$$

dir. Böylelikle, $\mathbb{R}^{2n+1}$ Greiner vektör alanlarındaki birim yuvarın küresel koordinatlardaki hacim diferansiyeli şu şekilde yazılabilir:

$$d\omega = \rho^{Q-1} d\rho \sin^{\frac{n-k}{k}} \theta d\theta \sin^{2n-2} \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{2n-3} \sin^2 \theta_{2n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{2n-2} d\theta_{2n-1}.$$

Diferansiyel daha kompakt olarak $d\omega = \rho^{Q-1} d\rho d\sigma$ şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$d\sigma = \sin^{\frac{n-k}{k}} \theta \sin^{2n-2} \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{2n-2} d\theta d\theta_1 \dots d\theta_{2n-2} d\theta_{2n-1}$$

dir. Eğer u fonksiyonu

$$u(\omega) = \frac{|z|^{p(2k-1)}}{\rho^{p(2k-1)}} u(\rho) = |\nabla_k \rho|^p u(\rho)$$

formunda ise integral

$$\begin{aligned}
\int_D u(\omega) d\omega &= \int_D |\nabla_k \rho|^p u(\rho) d\omega \\
&= \gamma_n \left(\int_0^\pi (\sin \theta)^{\frac{n-k}{k} + \frac{p(2k-1)}{2k}} d\theta \right) \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho^{Q-1} v(\rho) d\rho \right) \\
&= S_n \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho^{Q-1} v(\rho) d\rho \right)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &:= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \sin^{2n-2} \theta_1 \dots \sin \theta_{2n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{2n-2} d\theta_{2n-1} \\
&= 2\pi \left(\int_0^\pi \sin^{2n-2} \theta_1 d\theta_1 \right) \dots \left(\int_0^\pi \sin \theta_{2n-2} d\theta_{2n-2} \right).
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^{2n}$ 'deki Öklid küresinin Lebesgue ölçüsüdür ve

$$S_n := \gamma_n \int_0^\pi (\sin \theta)^{\frac{n-k}{k} + \frac{p(2k-1)}{2k}} d\theta$$

şeklindedir.

5. GREINER VEKTÖR ALANINDA HIZLI DİFÜZYON DENKLEMLERİ

5.1 Pozitif Çözümün Yokluğu

Tezin bu bölümünde Greiner vektör alanları üzerinde lineer olmayan hızlı difüzyon probleminin çözümü ile ilgilenilecektir. İlk, bu denklem ile ilgili yapılmış daha önceki çalışmalardan bahsedilecektir.

Kömbe (2006) yılındaki çalışmasında

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_k u^m + V(\omega)u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega \end{cases}$$

doğrusal olmayan hızlı difüzyon probleminin Greiner vektör alanında pozitif çözümünün yokluğu ile ilgilenmiştir.

Daha sonraki yıllarda Ahmetolan (2008), Greiner vektör alanı üzerinde

$$\begin{cases} \frac{\partial u^q}{\partial t} = \nabla_k \cdot (|\omega|^{-2\gamma} \nabla u^m) + V(\omega, t)u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega \end{cases}$$

doğrusal olmayan tekil katsayılı parabolik problemini çalışmıştır.

Bu tezin konusu olan problem ise şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) + V(\omega)u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

Burada $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve Ω , Greiner vektör alanında düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölgedir.

Bu problemlerdeki çözümler aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 5.1

N 'nin dışında kalan, sürekli yerel pozitif u çözümleri aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i) N, Ω bölgesinde Lebesgue ölçüsü sıfır olan kapalı bir alt küme,
- ii) $u: [0, T) \rightarrow L^1(\Omega)$ fonksiyonu bazı $T > 0$ değerleri için sürekli.
- iii) $(\omega, t) \rightarrow u(\omega, t) \in C((\Omega \setminus N) \times (0, T))$,
- iv) $(\Omega \setminus N) \times (0, T)$ bölgesi üzerinde $u(\omega, t) > 0$,
- v) $\lim_{t \rightarrow 0} u(\cdot, t) = u_0$,
- vi) u , (5.1) kısmi diferansiyel denkleminin çözümü ise $\nabla u \in L^2_{loc}(\Omega \setminus N)$.

Eğer u çözümü, (i), (ii), (iii), (iv), (v) ve (vi) ifadelerini sağlarsa bu duruma N 'nin dışında kalan genelleştirilmiş pozitif çözüm denir. Bu ifade N 'nin dışında kalan pozitif sürekli çözümlerden daha geneldir. Eğer $N = \emptyset$ ise u için sadece genelleşmiş pozitif yerel çözüm denir (Kömbe, 2006).

Şimdi, Greiner vektör alanlarındaki düzgün sınırlara sahip sınırlı bir Ω bölgesinde geçerli olan Sobolev eşitsizliği verilecektir.

Teorem 5.1

$\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı bir bölge olmak üzere, $1 < p < Q$ ve $p^* = \frac{pQ}{Q-p}$ olsun. Herhangi $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\Omega} |\phi|^{p^*} d\omega \right)^{1/p^*} \leq S \left(\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^p d\omega \right)^{1/p}$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir pozitif S sayısı vardır (Capogna vd., 1993).

Lemma 5.1

$\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge, $A \in L^{\frac{Q}{p}}(\Omega)$ ve $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ olmak üzere herhangi $0 < \varepsilon < 1$ sayısı için

$$\left| \int_{\Omega} A(\omega) |\phi|^p d\omega \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^p d\omega + C(\varepsilon) \int_{\Omega} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C(\varepsilon)$ pozitif sabiti vardır (Kömbe, 2006).

İspat 5.1

Hemen hemen her $\omega \in \Omega$ için $(A_n)_{n \geq 1}$ dizisi

$$A_n(\omega) := \min\{A_n(\omega), n\}$$

olarak tanımlansın. O halde, $L^{\frac{Q}{p}}(\Omega)$ üzerinde $n \rightarrow \infty$ iken $A_n \rightarrow A$ olur. Buradan,

$$\left| \int_{\Omega} A |\phi|^p d\omega \right| \leq \int_{\Omega} |A - A_n| |\phi|^p d\omega + n \int_{\Omega} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen eşitsizliğin sağ yanına Hölder eşitsizliği uygulanarak yazıldığında

$$\left| \int_{\Omega} A |\phi|^p d\omega \right| \leq \left(\int_{\Omega} |A - A_n|^{Q/p} d\omega \right)^{p/Q} \left(\int_{\Omega} |\phi|^{\frac{Qp}{Q-p}} d\omega \right)^{\frac{Q-p}{Q}} + n \int_{\Omega} |\phi|^p d\omega$$

olur. $1 \leq p < Q$ için Sobolev-Poincare tipi eşitsizlik yardımı ile

$$\left(\int_{\Omega} |\phi|^{\frac{Qp}{Q-p}} d\omega \right)^{\frac{Q-p}{Q}} \leq S \left(\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^p d\omega \right)$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla, buradan

$$\left| \int_{\Omega} A|\phi|^p d\omega \right| \leq S \left(\int_{\Omega} |A - A_n|^{q/p} d\omega \right)^{p/q} \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^p d\omega + n \int_{\Omega} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği görülür. Son olarak, yeterince büyük bir n sabiti ve herhangi $0 < \varepsilon < 1$ değeri için

$$\left(\int_{\Omega} |A - A_n|^{q/p} d\omega \right)^{p/q} \leq \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)S}$$

olur. $n = C(\varepsilon)$ seçildiğinde istenen sonuç elde edilmiş olur.

Şimdi ise tezin ana problemi olan hızlı difüzyon probleminin pozitif çözümünün yokluğu araştırılacaktır.

Problem 5.1

$\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, N ise Ω bölgesinde Lebesgue ölçüsü sıfır olan kapalı bir alt küme olsun. $V(\omega)$ fonksiyonu ve pozitif $A(\omega)$ fonksiyonu $L^1_{loc}(\Omega \setminus N)$ sınıfından birer potansiyel ve $0 < m < 1$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) + V(\omega) u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0 & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

doğrusal olmayan hızlı difüzyon probleminin hangi şartlar altında pozitif çözümü yoktur?

Teorem 5.2

$\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, $N \subset \Omega$, Lebesgue ölçüsü sıfır olan kapalı bir alt küme ve $Q = 2(n+k)$ homojen boyut olsun. $V(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega \setminus N)$, $0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega \setminus N)$ ve $\frac{Q-2}{Q} \leq m < 1$ olmak üzere,

$$R_\phi := \frac{\int_\Omega (\varepsilon + A(\omega)) |\nabla_k \phi|^2 d\omega - \int_\Omega V(\omega) |\phi|^2 d\omega}{\int_\Omega |\phi|^2 d\omega} \quad (5.2)$$

olsun. Eğer bazı $\varepsilon > 0$ değerleri için

$$\inf\{R_\phi : 0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus N)\} = -\infty$$

oluyorsa (5.1) hızlı difüzyon probleminin N 'nin dışında kalan genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü yoktur.

İspat 5.2

Bu teoremin kanıtlanmasında kullanılacak ispat türü çelişki yöntemidir. $T > 0$ olsun. $u: [0, T) \rightarrow L^1(\Omega)$ fonksiyonu $(\Omega \setminus N) \times (0, T)$ bölgesinde (5.1) probleminin pozitif çözümü olsun. Ayrıca $u_0 \geq 0$ ancak $u_0 \not\equiv 0$ olsun. $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus N)$ olmak üzere,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) + V(\omega) u^m$$

denkleminin her iki yanını $\frac{\phi^2}{u^m}$ test fonksiyonu ile çarpılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\phi^2}{u^m} \right) = \frac{\phi^2}{u^m} \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) + V(\omega) \phi^2$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ bölgesi üzerinde integre edilirse

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\phi^2}{u^m} d\omega &= \frac{1}{1-m} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{1-m} \phi^2(\omega) d\omega \\
&= \int_{\Omega} (\nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m)) \frac{\phi^2}{u^m} d\omega \\
&\quad + \int_{\Omega} V(\omega) \phi^2(\omega) d\omega \quad (5.3)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} (\nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m)) \frac{\phi^2}{u^m} d\omega \\
&\quad \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m)) \frac{\phi^2}{u^m} d\omega \quad (5.4)
\end{aligned}$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulandığında

$$\int_{\Omega} (\nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m)) \frac{\phi^2}{u^m} d\omega = - \int_{\Omega} A(\omega) \nabla_k(u^m) \cdot \nabla_k \left(\frac{\phi^2}{u^m} \right) d\omega$$

olur. Bu integralli eşitliğin sağındaki ifadede

$$\nabla_k(u^m) = m u^{m-1} \nabla_k(u),$$

$$\nabla_k \left(\frac{\phi^2}{u^m} \right) = \frac{2\phi \nabla_k(\phi) u^m - m u^{m-1} \nabla_k(u) \phi^2}{u^{2m}}$$

türevlerinin yerine yazılması ile ifade

$$- \int_{\Omega} \left(A(\omega) m u^{m-1} \nabla_k(u) \right) \cdot (2\phi \nabla_k(\phi) u^{-m} - m u^{-m-1} \nabla_k(u) \phi^2) d\omega$$

$$= \int_{\Omega} A(\omega) \left(\left(m \frac{\phi}{u} \nabla_k u - \nabla_k \phi \right)^2 - |\nabla_k \phi|^2 \right) d\omega \quad (5.5)$$

şeklini almaktadır. (5.5) ifadesinin sağındaki integral şu şekilde yazılabilir:

$$- \int_{\Omega} A(\omega) |\nabla_k \phi|^2 d\omega + \int_{\Omega} A(\omega) \left| m \frac{\phi}{u} \nabla_k u - \nabla_k \phi \right|^2 d\omega. \quad (5.6)$$

Dolayısıyla, (5.6) eşitliğinden şu eşitsizlik elde edilecektir:

$$\int_{\Omega} \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) \frac{\phi^2}{u^m} d\omega \geq - \int_{\Omega} A(\omega) |\nabla_k \phi|^2 d\omega.$$

(5.3) ve (5.6) ifadeleri birleştirildiğinde

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} V(\omega) \phi^2(\omega) d\omega - \int_{\Omega} A(\omega) |\nabla_k \phi|^2 d\omega \\ \leq \frac{1}{1-m} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{1-m} \phi^2(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.7) eşitsizliğinin, $0 < t_1 < t_2 < T$ olmak üzere, t_1 'den t_2 'ye integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} V(\omega) \phi^2(\omega) d\omega - \int_{\Omega} A(\omega) |\nabla_k \phi|^2 d\omega \\ \leq M. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Burada

$$M = \frac{1}{(1-m)(t_1 - t_2)} \int_{\Omega} (u^{1-m}(\omega, t_2) - u^{1-m}(\omega, t_1)) \phi^2(\omega) d\omega$$

şeklindedir. $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı olduğundan $|\Omega|$ sonludur. Şimdi ispatın burasında $\frac{Q-2}{Q} \leq m < 1$ iken konkav olan $f(u) = u^{(1-m)Q/2}$ fonksiyonu için Jensen eşitsizliği uygulanırsa, $u(\omega, t_i) \in L^1(\Omega)$ olduğundan

$$\int_{\Omega} (u(\omega, t_i))^{(1-m)Q/2} d\omega < C(\varepsilon) \left(\int_{\Omega} u(\omega, t_i) d\omega \right)^{(1-m)Q/2} < \infty$$

sonlu integrali elde edilir. Bu da

$$u^{1-m}(\omega, t_i) \in L^{\frac{Q}{2}}(\Omega)$$

demektir. Buradan

$$(u^{1-m}(\omega, t_2) - u^{1-m}(\omega, t_1)) \in L^{\frac{Q}{2}}(\Omega)$$

olması kaçınılmazdır. Şimdi $u^{1-m}(\omega, t_2) - u^{1-m}(\omega, t_1)$ fonksiyonu için Lemma 5.1 kullanılırsa, her $\varepsilon > 0$ için

$$M \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 d\omega + C(\varepsilon) \int_{\Omega} \phi^2 d\omega$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $C(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunur. Bu son eşitsizlik (5.8)'de kullanılırsa

$$\int_{\Omega} V(\omega) \phi^2(\omega) d\omega - \int_{\Omega} A(\omega) |\nabla_k \phi|^2 d\omega \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 d\omega + C(\varepsilon) \int_{\Omega} \phi^2 d\omega$$

ifadesi elde edilir ve burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$R_\phi = \frac{\int_{\Omega} (\varepsilon + A(\omega)) |\nabla_k \phi|^2 d\omega - \int_{\Omega} V(\omega) |\phi|^2 d\omega}{\int_{\Omega} |\phi|^2 d\omega} \geq -C(\varepsilon)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla,

$$\inf\{R_\phi: \mathbf{0} \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus N)\} \neq -\infty$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak belirlenen koşullar altında Problem 5.1'in pozitif çözümünden söz edilemez.



6. GREINER OPERATÖRÜ İLE İLİŞKİLENDİRİLMİŞ HARDY EŞİTSİZLİKLERİ

6.1 Giriş

Tezin bu bölümünde önce Greiner operatörü ile ilişkilendirilmiş Hardy eşitsizlikleriyle ilgili literatür bilgisi aktarılacaktır. Bu eşitsizlikler, bir fonksiyonun kendisini ve türevini birlikte barındıran integral eşitsizlikleri olup evölüsyon denklemlerinin pozitif çözümlerinin yokluğunun belirlenmesinde kritik öneme sahiptir.

Hardy'nin

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f ds \right)^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p dt \quad (6.1)$$

eşitsizliğini araştırmasındaki asıl motivasyonu, David Hilbert'e ait serisel bir eşitsizliği ispat etme arzusudur. (6.1) eşitsizliğinde

$$\phi(t) = \int_0^t f(s) ds$$

olarak alınırsa, bu eşitsizlik

$$\left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_0^\infty \frac{|\phi|^p}{t^p} dt \leq \int_0^\infty |\phi'|^p dt \quad (6.2)$$

halini alır. Buradaki $\left(\frac{p-1}{p} \right)^p$ sabiti en iyi sabittir. Yani, başka bir sabitle yer değiştirirse (6.1) eşitsizliği geçerliliğini kaybeder.

$\mathbb{R}^n$ 'de L^p Hardy tipi eşitsizlik; her $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ve $1 < p < n$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \geq \left(\frac{n-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi|^p}{|x|^p} dx \quad (6.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ sabiti en iyi sabittir. (6.3) eşitsizliği son birkaç on yılda Öklid uzayında birçok çalışmaya konu olmuş ve kısmi diferansiyel problemlerin çözümünde önemli rol oynamıştır. Detaylı bilgi için (Baras ve Goldstein, 1984; Vazquez ve Zuazua, 2000) kaynakları incelenmelidir.

(6.3) Hardy eşitsizliğini Greiner vektör alanlarına ilk genelleştirenler Zhang ve Niu (2003) ikilisidir. İkilinin elde ettiği eşitsizlik şöyledir: $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{(0,0)\})$ fonksiyonu ve $1 < p < Q$ değerleri için

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} |\nabla_k \phi|^p dzdl \geq \left(\frac{Q-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{p(2k-1)} \left(\frac{|\phi|}{\rho}\right)^p dzdl \quad (6.4)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Öte yandan, D'Ambrosio (2005) yılındaki quasi-linear ikinci dereceden dejenere operatörler ile ilgili çalışmasında ağırlıklı Hardy eşitsizlikleri elde etmiştir. Daha sonra, Niu v.d. (2010) yılında yaptıkları çalışmada

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \rho^{\alpha p} |\nabla_k \phi|^p dzdl \geq \left|\frac{Q+ap-p}{p}\right|^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \rho^{\alpha p} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{p(2k-1)} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dzdl \quad (6.5)$$

eşitsizliğini ispatlamıştır. Burada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{(0,0)\})$, $Q > 3$, $Q \neq p$ ve $Q + ap - p > 0$ şeklindedir. Ayrıca $\left|\frac{Q+ap-p}{p}\right|^p$ ifadesi (6.5) eşitsizliği için en iyi sabittir.

Lian (2013) yılında yayımlanan makalesinde

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{|z|^\beta}{\rho^{\alpha+\beta}} |\nabla_k \phi|^p dzdl \geq \left(\frac{Q+ap-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{|z|^\beta}{\rho^{\alpha+\beta}} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{p(2k-1)} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dzdl \quad (6.6)$$

ağırlıklı Hardy eşitsizliğinin $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ için geçerli olduğunu ispatlamıştır.

Burada $1 < p < Q - \alpha$ ve $\beta + 2n + (p-1)(2k-1) > 0$ 'dır. Ayrıca $\left(\frac{Q+ap-p}{p}\right)^p$

sabiti (6.6) eşitsizliği için en iyi sabittir. Daha sonra, Ahmetolan ve Kömbe (2016), Greiner operatörü Δ_k için iki ağırlıklı Hardy eşitsizliklerini incelemiştir.

6.2 Bazı Ağırlıklı Hardy Eşitsizlikleri

Yakın zamanda, Yener (2018) Greiner vektör alanında genel ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizlikler elde etmek için kullanılan yeni ve etkili bir yöntem tanıtmıştır. Bu yöntem aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

Teorem 6.1

$a \in C^1(\mathbb{R}^{2n+1})$ ve $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{2n+1})$ negatif olmayan iki fonksiyon olsun. Hemen hemen her $\omega \in \mathbb{R}^{2n+1}$ için pozitif $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ fonksiyonu

$$-\nabla_k \cdot (a|\nabla_k f|^{p-2} \nabla_k f) \geq b f^{p-1}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlıyorsa, $p > 1$ için

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} a(\omega) |\nabla_k \phi(\omega)|^p d\omega \geq \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} b(\omega) |\phi(\omega)|^p d\omega$$

genel ağırlıklı L^p Hardy eşitsizliği herhangi $\phi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{2n+1})$ fonksiyonu için geçerlidir (Yener, 2018).

Şimdi, yukarıda ifade edilen Teorem 6.1'den faydalanarak, radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip bazı L^p Hardy eşitsizlikleri ispatlarıyla verilecektir.

Teorem 6.2

$\Omega = \{\omega = (x, y, l) \in \mathbb{R}^{2n+1} : x_1 > 1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $p > 1$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega} \cos h^\alpha y_1 |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq (p-1) \int_{\Omega} \frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^p \log^{p-1} x_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği herhangi $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için sağlanır.

İspat 6.2

$x_1 > 1$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, Teorem 6.1'de $a(\omega) = \cos h^\alpha y_1$ ve $f(\omega) = \log x_1$ seçimi yapılsın. Seçilen fonksiyonlar X_j ve Y_j vektör alanlarıyla işleme sokulduğunda

$$X_j(\log x_1) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\log x_1) = \begin{cases} \frac{1}{x_1}, & j = 1 \\ 0, & j \neq 1 \end{cases},$$

$$Y_j(\log x_1) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\log x_1) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

olduğundan

$$\nabla_k(\log x_1) = \left\langle \frac{1}{x_1}, 0, 0, \dots, 0 \right\rangle$$

ve dolayısıyla

$$|\nabla_k(\log x_1)|^{p-2} = x_1^{2-p}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} -\nabla_k \cdot (\alpha |\nabla_k f|^{p-2} \nabla_k(\log x_1)) &= -\nabla_k \cdot \left\langle \frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^{p-1}}, 0, \dots, 0 \right\rangle \\ &= -X_1 \left(\frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^{p-1}} \right) \\ &= -\cos h^\alpha y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{1-p}) \\ &= (p-1) \frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^{p-1} \log^{p-1} y_1} f^{p-1} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2ky_1|z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l}$$

olarak ifade edilen vektör alanıdır. Tüm bu işlemlerin sonucunda

$$b(\omega) = (p-1) \frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^{p-1} \log^{p-1} y_1}$$

olduğu görülür ve Teorem 6.2'nin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 6.3

$\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı bir bölge ve $p > 1$ olsun. O halde,

$$\int_{\Omega} e^{-px_1} |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq \int_{\Omega} e^{-px_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği herhangi $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için sağlanır.

İspat 6.3

$p > 1$ için $a(\omega) = e^{-px_1}$ ve $f(\omega) = e^{x_1}$ seçimleri yapılsın. Burada direk hesaplama ile

$$\nabla_k f = e^{x_1} \langle 1, 0, 0, \dots, 0 \rangle$$

ve dolayısıyla

$$|\nabla_k f|^{p-2} = e^{x_1(p-2)}$$

elde edilir. Buradan

$$a(\omega) |\nabla_k f|^{p-2} \nabla_k f = e^{-x_1} \langle 1, 0, 0, \dots, 0 \rangle$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç $-\nabla_k$ ile işleme alındığında

$$\begin{aligned} -\nabla_k \cdot (a(\omega)|\nabla_k f|^{p-2}\nabla_k f) &= -X_1(e^{-x_1}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-x_1}) \\ &= e^{-x_1} \end{aligned}$$

fonksiyonu bulunur ve buradan

$$b(\omega) = e^{-px_1}$$

elde edilir. Böylelikle, Teorem 6.3 ispatlanmıştır.



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezin temel amacı aşağıdaki doğrusal olmayan hızlı difüzyon denkleminin, Greiner vektör alanlarında pozitif çözümünün yokluğunu araştırmaktır.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(\omega) \nabla_k u^m) + V(\omega) u^m, & \Omega \times (0, T), \\ u(\omega, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\omega, 0) = u_0(\omega) \geq 0, & \Omega. \end{cases}$$

Burada $0 < m < 1, V \in L^1_{loc}(\Omega), 0 < A(\omega) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve Ω , Greiner vektör alanında düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölgedir.

Bu tezde ayrıca radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip aşağıdaki L^p Hardy tipi eşitsizlikler elde edilmiştir: $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $p > 1$ olsun. O halde,

$$\int_{\Omega} \cos h^\alpha y_1 |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq (p-1) \int_{\Omega} \frac{\cos h^\alpha y_1}{x_1^p \log^{p-1} x_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği $\Omega = \{\omega = (x, y, l) \in \mathbb{R}^{2n+1}: x_1 > 1\}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken;

$$\int_{\Omega} e^{-px_1} |\nabla_k \phi|^p d\omega \geq \int_{\Omega} e^{-px_1} |\phi|^p d\omega$$

eşitsizliği de $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı bir bölge olmak üzere geçerlidir.

KAYNAKLAR

- Adams R. A., 1975. Sobolev Spaces, Academic Press, 320p, New York.
- Adimurthi A., Ramaswamy M., Chaudhuri N., 2002. An improved Hardy Sobolev inequality and its applications, Proceeding of the American Mathematical Society, 130(2), 489-505.
- Ahmetolan S., 2008. Nonlinear degenerate parabolic equations with singular coefficients for Greiner vector fields, Applicable Analysis, 87(7), 741-754.
- Balinsky A.A., Evans W.D., Lewis R.T., 2015. The analysis and geometry of Hardy's inequality, Springer, New York.
- Baras P., Goldstein J. A., 1984. The heat equation with a singular potential. Transactions of the American Mathematical Society, 284, 121–139.
- Beals R., Greiner P. C., 1988. Calculus on Heisenberg Manifolds, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 77, 209-248.
- Cabre X., Martel Y., 1999. Existence versus explosion instantane pour des equations de la chaleur lineaires avec potentiel singulier. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics, 329(11), 973–978.
- Capogna, L., Danielli, D. and Garofalo, N., 1993. An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations. Communications in Partial Differential Equations, 18, 1765–1794.
- D'Ambrosio L., Dipierro S., 2014. Hardy inequalities on Riemannian manifolds and applications, Annales de l'Institut Henri Poincare Non Linear Analysis, 31(3), 449–475.
- Evans L., 2002. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 749p, Rhode Island.
- Folland G.B., 1973. A fundamental solution for a subelliptic operator, Bulletin American Mathematical Society, 79(2), 373–376.
- Garcia J.P., Alonso P.I., 1998. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems, Journal of Differential Equations, 144, 441–476.
- Garofalo N., Lanconelli E., 1992. Existence and nonexistence results for semilinear equations on the Heisenberg group, Indiana University Mathematics Journal, 41(1), 71–98.

- Ghoussoub N., Moradifam A., 2008. On the best possible remaining term in the Hardy inequality, *Proceeding of the National Academy of Science*, 105(37), 13746–13751.
- Ghoussoub N., Moradifam A., 2013. *Functional inequalities: New perspectives and new applications*, American Mathematical Society, Rhode Island.
- Goldstein J. A., Hauer D., Rhandi A., 2016. Existence and nonexistence of positive solutions of p -Kolmogorov equations perturbed by a Hardy potential, *Nonlinear Analysis*, 131, 121–154.
- Goldstein J.A., Kombe I., 2005. Nonlinear degenerate parabolic equations on the Heisenberg group, *International Journal of Evolution Equations*, 1, 1–22
- Goldstein J. A., Kombe I., 2003. Nonlinear parabolic differential equations with singular lower order term, *Advances in Differential Equations*, 10, 1153-1192.
- Goldstein J.A., Zhang, Q.S., 2001. On a degenerate heat equation with a singular potential, *Journal of Functional Analysis*, 186(2), 342–359.
- Goldstein J. A., Zhang Q. S., 2003. Linear parabolic equations with strong singular potentials, *Transaction American Mathematical Society*, 355(1), 197-211.
- Goldstein G. R., Goldstein J. A., Kombe I., 2005. Nonlinear parabolic equations with singular coefficient and critical exponent, *Applicable Analysis*, 84(6), 571-583.
- Goldstein J. A., Kombe I., 2003. Nonlinear degenerate parabolic equations with singular lower-order term, *Advances of Differential Equations*, 8(10), 1153-1192.
- Greiner P.C., 1979. A fundamental solution for non-elliptic partial differential operator, *Canadian Journal of Mathematics*, 31, 1107–1120.
- Hauer D., Rhandi A., 2013. A weighted Hardy inequality and nonexistence of positive solutions, *Archiv der Mathematik*, 100, 273–287.
- Heisenberg W., 1927. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen "Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik*, 43, 172–198.
- Hörmander L., 1967. Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Mathematica*, 119, 147–171.
- Kombe I., 2004. The linear heat equation with highly oscillating potential, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132(9), 2683-2691.

- Kombe I., 2006. On the nonexistence of positive solutions to nonlinear degenerate parabolic equations with singular coefficients, *Applicable Analysis*, 85(5), 467-478.
- Kombe I., Yener A., 2019. A general approach to weighted L^p Rellich type inequalities related to Greiner operator, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 18(2), 869-886.
- Kufner A., Persson L.E., 2003. *Weighted inequalities of Hardy type*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, New Jersey.
- Lu, G., 1994. The sharp Poincaré' inequality for free vector fields: An endpoint result. *Revista Matemática Iberoamericana*, 10(2), 453–466.
- Niu P., Ou Y., Han J., 2010. Several Hardy-type inequalities with weights related to generalized Greiner operator, *Canadian Mathematical Bulletin*, 53(1), 153–162.
- Peral I., Vazquez J., 1995. On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 129, 201–224.
- Shen Y. T., 1980. On the Dirichlet problem for quasilinear elliptic equation with strongly singular coefficients, *Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*, Science Press, Beijing, 1407-1417.
- Vazquez J. L., Zuazua E., 2000. The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential, *Journal of Functional Analysis*, 173(1), 103–153.
- Yener A., 2018. General Weighted Hardy-type inequalities related to Greiner Operators, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 48(7), 2405-2430.
- Yener A., 2016. Weighted Hardy-type inequalities on the Heisenberg group, *Mathematical Inequalities and Applications*, 19, 671–683.
- Zhang Q. S., 2001. The Quantizing effect of potentials on the critical number of reaction diffusion equations, *Journal of Differential Equations*, 170, 188–214.
- Zhang H., Niu P., 2003. Hardy-type inequalities and Pohozaev-type identities for a class of p -degenerate subelliptic operators and applications, *Nonlinear Analysis*, 54(1), 165–186.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ahmet Uğur UTKU

Eğitim Durumu

Lisans : Doğu Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi, İngilizce Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yayınları

Utku A.U., 2022, Nonlinear Parabolic Equations On Greiner Operators Related To Some Integral Inequalities, 5th International E-Conference On Mathematical Advances and Applications, 11-14 May, Istanbul, 32.