

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERDUAL MATRİSLERDE DETERMİNANT,
KARAKTERİSTİK POLİNOM, KARAKTERİSTİK
KÖK, ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖR TEORİSİ
ÜZERİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

Pelin DURSUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Nurten GÜRSES

Haziran, 2026

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HİPERDUAL MATRİSLERDE DETERMİNANT,
KARAKTERİSTİK POLİNOM, KARAKTERİSTİK KÖK,
ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖR TEORİSİ ÜZERİNE YENİ BİR
YAKLAŞIM**

Pelin DURSUN tarafından hazırlanan tez çalışması 03.06.2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Nurten GÜRSES
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Nurten GÜRSES, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Salim YÜCE, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Nurten GÜRSES sorumluluğunda tarafımda hazırlanan “Hiperdual Matrislerde Determinant, Karakteristik Polinom, Karakteristik Kök, Özdeğer ve Özvektör Teorisi Üzerine Yeni Bir Yaklaşım” başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim.

Bu tez çalışmasının kavramsallaştırılması, planlanması, yürütülmesi, değerlendirilmesi ve metnin yazım süreci dâhil olmak üzere hiçbir aşamasında Üretken Yapay Zekâ teknolojilerinden yararlanılmamış, çalışma tamamen kendi özgün çabamla gerçekleştirilmiştir.

Beyanımın aksinin tespiti hâlinde doğabilecek her türlü idari ve hukuki sorumluluğu kabul ederim.

Pelin DURSUN

İmza



Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü'nün FYL-2025-6862 numaralı projesi ve Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'nun (TÜBİTAK) 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında 1649B022401596 numaralı bursu ile desteklenmiştir.

Aileme...



TEŞEKKÜR

Tez sürecinin her aşamasında bilgisi, dikkati, emeği ve güven veren varlığıyla yanımda olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Nurten GÜRSES'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Salim YÜCE'ye destekleri ve yol gösterici katkıları için teşekkür ederim. Ayrıca, 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında sağladığı destek için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Pelin DURSUN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	viii
TABLO LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xii
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	7
1.3 Tezin Özgün Katkıları	7
2 TEMEL KAVRAMLAR	8
2.1 Dual Sayılar, Dual Vektörler ve Dual Matrisler	8
2.2 Hiperdual Sayılar, Hiperdual Vektörler ve Hiperdual Matrisler	21
3 DUAL MATRİSLERDE DETERMİNANT, KARAKTERİSTİK POLİNOM, KARAKTERİSTİK KÖK, ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖR TEORİSİ	35
4 HİPERDUAL MATRİSLERDE DETERMİNANT, KARAKTERİSTİK POLİNOM, KARAKTERİSTİK KÖK, ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖR TEORİSİ ÜZERİNE YENİ BİR YAKLAŞIM	56
4.1 Hiperdual Matrislerin Determinantı	56
4.2 Hiperdual Matrislerin Karakteristik Polinomu	68
4.3 Hiperdual Matrislerin Özdeğer ve Özvektörleri	73
5 UYGULAMALAR	84
5.1 3×3 Dual Tridiagonal Matrislere Uygulama	84
5.2 3×3 Hiperdual Tridiagonal Matrislere Uygulama	90
6 SONUÇ	99
KAYNAKÇA	100



SİMGE LİSTESİ

$\varepsilon, \varepsilon^*$	Dual birimler
$\hat{A}$	Dual matris
$\mathbb{D}^{m \times n}$	Dual matrisler kümesi
$\hat{\lambda}$	Dual özdeğer
$\mathbb{D}$	Dual sayılar kümesi
$\hat{x}$	Dual vektör
$\mathbb{D}^n$	Dual vektörler kümesi
E	Genelleştirilmiş kompleks sayı birimi
$\mathbb{C}_{q,p}$	Genelleştirilmiş kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	Hiperbolik sayılar kümesi
A	Hiperdual matris
$\mathbb{H}\mathbb{D}^{m \times n}$	Hiperdual matrisler kümesi
Λ	Hiperdual özdeğer
$\mathbb{H}\mathbb{D}$	Hiperdual sayılar kümesi
X	Hiperdual vektör
$\mathbb{H}\mathbb{D}^n$	Hiperdual vektörler kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
i	Sanal birim

TABLO LİSTESİ

Tablo 5.1	A_s, A_d ve $\hat{A}$ Matrislerinin Özdeğerleri ve Özvektörleri	86
Tablo 5.2	$y_1 = 0$ için $A_s, A_{d_1}, A_{d_2}, A_{d_3}$ ve A Matrislerinin Özdeğerleri ve Özvektörleri	91
Tablo 5.3	$y_1 = 0$ için 3×3 Hiperdual Tridiagonal A Matrisinin Özdeğerleri ve Özvektörleri	92
Tablo 5.4	$y_1 \neq 0$ için $A_s, A_{d_1}, A_{d_2}, A_{d_3}$ ve A Matrislerinin Özdeğerleri ve Özvektörleri	93
Tablo 5.5	$y_1 \neq 0$ için 3×3 Hiperdual Tridiagonal A Matrisinin Özdeğerleri ve Özvektörleri	94

HİPERDUAL MATRİSLERDE DETERMINANT, KARAKTERİSTİK POLİNOM, KARAKTERİSTİK KÖK, ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖR TEORİSİ ÜZERİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

Pelin DURSUN

Matematik Anabilim Dalı
YÜKSEK LİSANS Tezi

Danışman: Doç. Dr. Nurten GÜRSES

Bu tezde, dual matrisler üzerine yapılan çalışmalardan hareketle, hiperdual matrislerde determinant kavramına yönelik yeni bir yaklaşım sunulmuş; karakteristik polinom, karakteristik kök, özdeğer ve özvektör kavramları sistematik bir biçimde ele alınmıştır.

Tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmanın kapsamı tanıtılmış, ilgili literatüre yer verilmiş, tezin amacı ve özgün katkıları ortaya konulmuştur. İkinci bölümde, dual sayılar, dual vektörler ve dual matrisler ile hiperdual sayılar, hiperdual vektörler ve hiperdual matrislere ilişkin temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, dual matrislerde determinant, karakteristik polinom, karakteristik kök, özdeğer ve özvektör kavramları ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, hiperdual matrisler için determinant kavramına yönelik yeni bir yaklaşım sunulmuş; bu yaklaşımdan hareketle hiperdual matrislerin karakteristik polinomu tanımlanmış ve karakteristik kökleri incelenmiştir. Ayrıca, karakteristik kökler ile özdeğerler arasındaki ilişki ele alınmış ve bu köklerin hangi koşullar altında özdeğer olarak kabul edilebileceği gösterilmiştir. Bu kapsamda, dual matrislerde olduğu gibi, bir $n \times n$ hiperdual matrisin en fazla n özdeğere sahip olabileceği, bazı durumlarda hiç özdeğere sahip olmayabileceği ya da sonsuz sayıda özdeğere sahip olabileceği ortaya konulmuştur. Buna bağlı olarak, hiperdual matrislerin özvektörlerinin elde edilmesine ilişkin koşullar belirlenmiş ve elde

edilen sonuçlar çeşitli örneklerle desteklenmiştir.

Beşinci bölümde, 3×3 tridiagonal matrisler üzerinde uygulamalara yer verilmiştir. Bu bölümde, literatürdeki dual teori özel bir 3×3 dual tridiagonal matris tipi üzerinde; bu tezde geliştirilen teori ise özel bir 3×3 hiperdual tridiagonal matris tipi üzerinde uygulanmıştır.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise tez kapsamında ulaşılan sonuçlar değerlendirilmiş ve ileride yapılabilecek çalışmalara ilişkin önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Karakteristik kök, özdeğer-özvektör, dual matris, hiperdual matris, tridiagonal matris.



ABSTRACT

A NEW APPROACH TO DETERMINANT, CHARACTERISTIC POLYNOMIAL, CHARACTERISTIC ROOT, EIGENVALUE, AND EIGENVECTOR THEORY OVER HYPERDUAL MATRICES

Pelin DURSUN

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nurten GÜRSES

This thesis presents a new approach to the determinant of hyperdual matrices, based on studies of dual matrices, and systematically examines the concepts of the characteristic polynomial, characteristic roots, eigenvalues, and eigenvectors.

The thesis consists of six chapters. The first chapter introduces the scope of the study, reviews the related literature, and outlines the thesis's aim and contributions. The second chapter presents the fundamental concepts and definitions related to dual numbers, dual vectors, and dual matrices, as well as hyperdual numbers, hyperdual vectors, and hyperdual matrices. In the third chapter, the concepts of determinant, characteristic polynomial, characteristic roots, eigenvalues, and eigenvectors for dual matrices are discussed.

In the fourth chapter, a new approach to the concept of determinant for hyperdual matrices is proposed. Based on this approach, the characteristic polynomial of hyperdual matrices is defined, and their characteristic roots are examined. In addition, the relationship between characteristic roots and eigenvalues is investigated, and the conditions under which these roots can be regarded as eigenvalues are established. In this context, as in the case of dual matrices, it is shown that an $n \times n$ hyperdual matrix can have at most n eigenvalues, may have no eigenvalues in some cases, or may have infinitely many eigenvalues. Accordingly,

the conditions for obtaining the eigenvectors of hyperdual matrices are determined, and the obtained results are supported by various examples.

In the fifth chapter, applications on 3×3 tridiagonal matrices are presented. In this chapter, the dual theory in the literature is applied to a certain type of 3×3 dual tridiagonal matrices, and the theory developed in this thesis is applied to a certain type of 3×3 hyperdual tridiagonal matrices.

In the sixth and final chapter, the results obtained within the scope of the thesis are evaluated, and suggestions for future studies are provided.

Keywords: Characteristic root, eigenvalue-eigenvector, dual matrix, hyperdual matrix, tridiagonal matrix.



1.1 Literatür Özeti

Matematikte ikinci dereceden denklemlerin çözülebilir olup olmadığı ve nasıl çözülebileceği önemli bir yer teşkil etmektedir. Bu doğrultuda

$$x^2 - qx - p = 0 \quad (1.1)$$

formundaki ikinci dereceden denklemlerin çözüm durumları sayı kümelerinin genişletilmesi fikrinin ortaya atılmasıyla incelenebilir hâle gelmiştir.

Bu fikri açıklamak amacıyla, öncelikle (1.1) denkleminin lineer terim içermeyen özel hâli olan

$$x^2 - p = 0, \quad p \in \mathbb{Q} \quad (1.2)$$

denklemini ele alalım. $p < 0$ için $x \in \mathbb{Q}$ olacak şekilde bir çözümün olmadığı açıktır. $p > 0$ olması durumunda ise $x \notin \mathbb{Q}$ şeklindedir¹. Bu nedenle rasyonel sayılar cismi $\mathbb{Q}$, reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ 'ye genişletildiğinde (1.2) denklemi $p > 0$ için çözülebilir hâle gelir. Bununla birlikte, $p < 0$ için $x^2 - p = 0$ denkleminin reel sayılar kümesinde de çözümü yoktur. Örneğin $x^2 + 1 = 0$ denklemi $\mathbb{R}$ üzerinde çözümsüzdür. Bu durum, reel sayılar cisminin $x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözümünü içerecek şekilde daha geniş bir sayı sistemine genişletilmesini gerektirir. Böylece $i^2 = -1$ eşitliğini sağlayan $i := \sqrt{-1}$ sanal birimi tanımlanır. Bu tanım aracılığıyla kompleks sayılar kümesi, $1 \in \mathbb{R}$ birim elemanı ile i sanal biriminin tüm reel lineer kombinasyonlarından oluşan

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid i^2 = -1, a, b \in \mathbb{R}\} \quad (1.3)$$

¹Eğer $p = 2$ için böyle bir çözümün varlığı kabul edilirse, bu çözüm $x = \frac{m}{n}$ biçiminde yazılabilir; burada $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ve $\text{EBOB}(m, n) = 1$ alınır. Bu durumda $x^2 = 2$ eşitliğinden $\frac{m^2}{n^2} = 2$ ve dolayısıyla $m^2 = 2n^2$ elde edilir. Buradan m^2 çift olduğundan m de çifttir. $m = 2k$ yazılırsa $4k^2 = 2n^2$, yani $n^2 = 2k^2$ bulunur. Bu da n 'nin çift olduğunu gösterir. Böylece m ve n ortak bölen olarak 2'ye sahiptir. Bu durum, $\text{EBOB}(m, n) = 1$ kabulüyle çelişir.

kümesi olarak elde edilir.

Cebirsel olarak $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kompleks sayılar cismi, birim elemanı $1 := 1 + 0i$ olan ve $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reel sayılar cismini alt cisim olarak içeren bir cisimdir. Böylece (1.2) denkleminin, $p < 0$ durumu da dâhil olmak üzere, kompleks sayılar cisminde çözümü mevcut hâle gelir.

Bu bilgilerden hareketle (1.1) denkleminin çözümlerine geri dönüldüğünde, bu denklemi sağlayan reel olmayan yeni bir E elemanı eklenerek reel sayılar kümesi genişletilebilir. Bu durumda

$$\mathbb{C}_{q,p} := \{a + bE \mid E^2 = qE + p, \ a, b, p, q \in \mathbb{R}, \ E \notin \mathbb{R}\} \quad (1.4)$$

biçimindeki genelleştirilmiş kompleks sayılar kümesi elde edilir. (1.1) denkleminin diskriminantı olan $q^2 + 4p$ ifadesinin işaretine göre genelleştirilmiş kompleks sayılar üç farklı sayı sistemine indirgenir [1–7]:

- (i) $q^2 + 4p > 0$ için hiperbolik sistem elde edilir; $p = 1, q = 0$ için $\mathbb{C}_{0,1} \cong \mathbb{H}$ olup bu yapı $\mathbb{H}$ hiperbolik sayılar sistemine izomorftur [1–4].
- (ii) $q^2 + 4p < 0$ için eliptik sistem elde edilir; $p = -1, q = 0$ için $\mathbb{C}_{0,-1} \cong \mathbb{C}$ olup bu yapı $\mathbb{C}$ kompleks sayılar sistemine izomorftur [4, 5].
- (iii) $q^2 + 4p = 0$ için parabolik sistem elde edilir; $p = 0, q = 0$ için $\mathbb{C}_{0,0} \cong \mathbb{D}$ olup bu yapı $\mathbb{D}$ dual sayılar sistemine izomorftur [4–7].

Dual sayılar ilk olarak 1873 yılında Clifford tarafından tanıtılmış ve kinematik ile diferansiyel geometri çalışmalarında kullanılmıştır [1, 8]. Bu sayı sistemi, özellikle türev alma ve geometrik dönüşümler gibi işlemlerde sonsuz küçük niceliklerin cebirsel olarak ele alınmasına imkân sağlamaktadır.

Reel ve kompleks sayı sistemlerinde sıfırdan farklı bir elemanın karesinin sıfır olması mümkün değildir. Bunun nedeni, bu yapıların tamlık bölgesi² olmasıdır. Başka bir ifadeyle, $ab = 0$ eşitliği ancak $a = 0$ veya $b = 0$ durumunda sağlanır. Buna karşılık, sıfır bölen³ içeren halkalarda kısaltma özelliği⁴ genel olarak geçerli değildir. Bu tür yapılarda sıfırdan farklı olup belirli bir kuvveti sıfır olan elemanlar bulunabilir. Genel olarak, bir a elemanı bazı $n \geq 1$ için $a^n = 0$ koşulunu sağlıyorsa

²Değişmeli, birimli ve sıfır bölensiz bir halkaya tamlık bölgesi denir.

³Bir R halkasında $a \in R$ elemanı için $a \neq 0$ ve $ab = 0$ veya $ba = 0$ olacak şekilde $b \in R, b \neq 0$ mevcut ise a elemanına sıfır bölen denir.

⁴Bir R halkasında $a, b, c \in R$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ab = ac \Rightarrow b = c$ oluyorsa R halkasında soldan kısaltma özelliği sağlanıyor denir.

nilpotent eleman olarak adlandırılır. Sıfırdan farklı her nilpotent eleman bir sıfır bölendir ve bu tür elemanlar tamlık bölgesi olmayan cebirsel yapılarda doğal olarak ortaya çıkar.

Bu çerçevede dual sayılarda $\varepsilon^2 = 0$ olmasına rağmen $\varepsilon \neq 0$ olduğu görülür. Bu yapı, diferansiyel geometride birinci mertebeden sonsuz küçük yer değiştirmelerin cebirsel bir modeli olarak yorumlanmaktadır. Dual sayı yapısındaki ε elemanının nilpotent olması, yani $\varepsilon^2 = 0$ koşulunu sağlaması nedeniyle, bir reel fonksiyonun Taylor açılımı birinci mertebede doğal olarak sonlanır ve türev bilgisi ε katsayısında doğrudan ortaya çıkar.

Dual sayılar; robotik, rijit cisim hareketi ve vida teorisi gibi alanlarda dönme ve öteleme hareketlerinin temsilinde yaygın olarak kullanılmakta, bunun yanı sıra otomatik türev (automatic differentiation) yönteminin temel araçlarından biri olarak da önemli bir rol oynamaktadır. Dual sayılar Kotel'nikov tarafından kinematik alanına [9], Study ve Dimentberg tarafından ise mekanik alanına uygulanmıştır [7, 10]. Dual sayılar, dual vektörler ve dual matrisler üzerine yapılan çalışmalar literatürde geniş bir uygulama alanı bulmuştur [11–18]. Dimentberg [10], dual sayılar ve dual vektörler aracılığıyla vida teorisini kapsamlı biçimde ele almış; reel fonksiyonlar için analitiklik kavramını dual fonksiyonlara genellemiş ve dual polinomların köklerini incelemiştir. Veldkamp [14], dual sayıların cebirsel özelliklerini ayrıntılı olarak incelemiştir. Dual vektörler ile vida teorisi arasındaki ilişki literatürde ayrıntılı biçimde ele alınmış ve bu iki yapı arasındaki bağlantı çeşitli açılardan incelenmiştir [10, 14, 19, 20]. Chevallier [15] ve Hao [16], dual sayılar halkası üzerinde tanımlı Lie cebirlerini incelemiştir. Mekanizma teorisinde uzaysal manipülatörlerin katı cisim yer değiştirmeleri, dual sayı cebiri kullanılarak vida hareketleri aracılığıyla temsil edilmiştir [14, 19, 21]. Ayrıca, determinant, özdeğer ve özvektör gibi lineer cebirin temel kavramları dual matrisler için de ele alınmıştır. Literatürde dual matrislerin determinant yapısı, özdeğer ve özvektörleri, ters ve genelleştirilmiş ters kavramları ile çeşitli matris ayrışmaları üzerine çalışmalar yapılmıştır [18, 22–44].

Birinci mertebeden türevlerin hesaplanmasında kullanılan sonlu fark yöntemleri (finite difference methods), türev değerini yaklaşık olarak belirlemeye dayanır. Bu amaçla en yaygın kullanılan yaklaşımlar ileri fark (forward difference) ve merkezi fark (central difference) yöntemleridir. İleri fark yönteminde türevlenebilir bir f fonksiyonu için birinci türev

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.5)$$

şeklinde ifade edilirken, merkezi fark yönteminde ise

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.6)$$

biçiminde verilir [45–47]. Buradaki $\mathcal{O}(h)$ ve $\mathcal{O}(h^2)$ terimleri, sırasıyla bu yaklaşımların kesme hatası mertebesini ifade eder. Bu sonlu fark yaklaşımları Taylor serisi yardımıyla elde edilebilir. Nitekim $d = \pm h \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonunun Taylor açılımı

$$f(x+d) = f(x) + df'(x) + \frac{1}{2}d^2 f''(x) + \frac{1}{3!}d^3 f'''(x) + \dots \quad (1.7)$$

şeklindedir [48].

Sonlu fark yaklaşımlarında temel olarak kesme hatası (truncation error) ve anlamlı basamak kaybı (loss of significance) meydana gelmektedir. Kesme hatası, Taylor açılımında ihmal edilen daha yüksek mertebeden terimlerden kaynaklanır. Örneğin ileri fark formülünün kesme hatası $\mathcal{O}(h)$ iken merkezi fark formülünün kesme hatası $\mathcal{O}(h^2)$ mertebesindedir. Kesme hatası, h değeri küçültülerek azaltılabilir. Ancak h değeri çok küçük seçildiğinde $f(x)$, $f(x+h)$ ve $f(x-h)$ değerleri birbirine çok yakın hâle gelir. Bu değerlerin sonlu hassasiyetli bilgisayar aritmetiğinde birbirinden çıkarılması sırasında anlamlı basamak kaybı meydana gelir. Bu nedenle yuvarlama hataları baskın hâle gelebilir. h değeri makine hassasiyetinden daha küçük seçildiğinde ise x , $x+h$ ve $x-h$ sayıları bilgisayar tarafından aynı sayı olarak temsil edilebilir. Bu durumda türev değeri hatalı biçimde sıfır olarak elde edilebilir [45–47].

Bu hataları azaltmak amacıyla geliştirilen kompleks adım yöntemi (complex-step method), fonksiyonun reel olmayan küçük bir pertürbasyon ile değerlendirilmesine dayanır. Bu yöntemde, $i^2 = -1$ olmak üzere, fonksiyon $x + hi$ noktasında değerlendirilir ve Taylor açılımı

$$f(x+hi) = \left(f(x) - \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \dots \right) + h \left(f'(x) - \frac{1}{3!}h^2 f'''(x) + \dots \right) i \quad (1.8)$$

biçimini alır. Buradan birinci türev yaklaşık olarak

$$f'(x) = \frac{\text{Im}(f(x+hi))}{h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.9)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\text{Im}(f(x))$, $f(x+hi)$ kompleks değerinin sanal (imažiner) kısmını göstermektedir. Kompleks adım yöntemi anlamlı basamak kaybı oluşturan bir çıkarma işlemi içermediğinden yüksek doğrulukta sonuçlar üretebilir.

Ancak Taylor açılımındaki daha yüksek mertebeden terimler nedeniyle türev değeri yine yaklaşık olarak elde edilmektedir [45–47].

Dual sayılar kullanıldığında, birinci mertebeden türevler kesme hatası ve anlamlı basamak kaybı oluşmadan tam olarak hesaplanabilmektedir. Bu durumda, $\varepsilon^2 = 0$ olduğundan (1.7) eşitliğinde verilen Taylor açılımı

$$f(x + h\varepsilon) = f(x) + hf'(x)\varepsilon \quad (1.10)$$

şeklinde birinci mertebede sonlanır [9].

İkinci türevlerin hesaplanması için de sonlu fark yöntemleri kullanılabilir. Örneğin ileri fark yaklaşımı

$$f''(x) = \frac{f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h) \quad (1.11)$$

şeklindedir. Merkezi fark yaklaşımı ise

$$f''(x) = \frac{f(x + 2h) - 2f(x) + f(x - 2h)}{4h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.12)$$

biçiminde verilir. Ancak birinci türev hesaplamalarında olduğu gibi bu yöntemlerde de kesme hatası ve anlamlı basamak kaybı birlikte ortaya çıkmaktadır. h değeri küçültülerek kesme hatası azaltılabilse de bu değerin çok küçük seçilmesi durumunda anlamlı basamak kaybı baskın hâle gelebilmektedir [45–47].

Kompleks adım yöntemi kullanılarak ikinci türev de yaklaşık olarak elde edilebilir. Buna göre ikinci türev

$$f''(x) = \frac{2(f(x) - \text{Re}[f(x + hi)])}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.13)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\text{Re}[f(x + hi)]$, $f(x + hi)$ kompleks değerinin reel kısmını göstermektedir. Ancak bu formül fonksiyon değerleri arasında fark alma işlemi içerdiğinden anlamlı basamak kaybına neden olabilir [45–47].

Buna karşılık, dual sayılar kullanılarak yalnızca birinci mertebeden türev bilgisi elde edilebilmekte; ikinci mertebeden türevler doğrudan hesaplanamamaktadır. Bu durum, genelleştirilmiş kompleks sayıların daha yüksek boyutlu genişlemelerinin incelenmesine olanak sağlamıştır. Bu genişlemelerin en bilinenlerinden biri olan reel kuaterniyonlar⁵ kullanılarak $d = h_1i + h_2j + 0k$ için ikinci türev yaklaşık

⁵Reel (Hamilton) kuaterniyonlar, $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ biçiminde ifade edilir. Buradaki i, j, k kuaterniyonik birimleri arasında $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ ve $ki = -ik = j$ ilişkileri mevcuttur [49–51].

olarak

$$f''(x) = \frac{2(f(x) - \operatorname{Re}[f(x + h_1 i + h_2 j + 0k)])}{h_1^2 + h_2^2} + \mathcal{O}(h_1^2 + h_2^2) \quad (1.14)$$

şeklinde elde edilir. Ancak burada fonksiyon değerleri arasındaki fark alma işleminden dolayı anlamlı basamak kaybı meydana gelebilir [45–47].

Bu doğrultuda, dual sayıların daha yüksek boyutlu bir genişlemesi olarak, ikinci mertebe türev terimlerinin temsil edilebilmesi amacıyla iki farklı nilpotent eleman içeren hiperdual sayılar geliştirilmiştir. Hiperdual sayılar kullanıldığında Taylor açılımı ikinci mertebede sonlanmakta; dolayısıyla birinci ve ikinci mertebe türevler kesme hatası ve anlamlı basamak kaybı oluşmadan doğrudan elde edilebilmektedir. Böylece hiperdual sayılar, birinci ve ikinci mertebe türevlerin tam olarak hesaplanmasına imkân sağlamaktadır. Bu çerçevede hiperdual sayılar, dual sayıların birinci mertebe türev hesabında sağladığı avantajı ikinci mertebe türev hesaplamalarına genişleten bir yapı olarak ortaya çıkmaktadır [52].

Hiperdual sayılar, çok cisimli sistem kinematiği başta olmak üzere farklı alanlarda ele alınmıştır. Bu kapsamda, konum, yönelim ve hız bilgisini eşzamanlı olarak içeren hiperdual açı kavramı hiperdual dönüşüm matrisi yardımıyla tanımlanmış; dual sayıların otomatik türev özelliğinden yararlanılarak rijit cisimlere ait hız ve ivme büyüklüklerinin cebirsel olarak elde edilebildiği gösterilmiştir [53]. Bu yaklaşım daha sonra rijit cisim hareket denklemlerinin hiperdual sayı formunda ifade edilmesine genişletilmiş ve hiperdual Jacobi matrisi, hiperdual hız, hiperdual momentum ve hiperdual atalet operatörü gibi kavramlar ele alınmıştır [54].

Hiperdual sayıların cebirsel yapısı ve türev hesabıyla ilişkisi de literatürde incelenen önemli konular arasındadır. Dual sayıların cebirsel özelliklerinin n mertebeli hiperdual sayılar ve hiperdual vektörler için de geçerli olduğu gösterilmiş ve Kotel'nikov'un aktarım ilkesinin (principle of transference) hiperdual yapılara genişletilebileceği ortaya konulmuştur [55]. Ayrıca hiperdual sayı cebiri kullanılarak yüksek mertebeden türevlerin hesaplanmasına yönelik kuramsal bir çerçeve geliştirilmiştir. [56, 57].

Hiperdual sayılar, yüksek mertebeden türevlerin sayısal olarak hesaplanmasında da etkili bir araç olarak kullanılmıştır. Bu doğrultuda geliştirilen yöntemler farklı uygulama problemleri üzerinde incelenmiş; ayrıca hiperdual sayıların matris temsilleri yardımıyla yüksek mertebeden türevlerin hesaplanmasına yönelik yaklaşımlar ele alınmıştır [58–61]. Bunun yanında, hiperdual sayılar ve hiperdual matrisler kinematik açıdan da değerlendirilmiş; hiperdual sayıların geometrik

yorumları, hiperdual matrisler arasındaki dual dönüşümler ve Euler–Rodrigues formülünün hiperdual matrislere uygulanması incelenmiştir [62–66].

Hiperdual matrisler üzerine yapılan çalışmalarda ise genelleştirilmiş ters kavramları öne çıkmaktadır. Bu bağlamda, hiperdual Moore–Penrose genelleştirilmiş tersi ve hiperdual grup genelleştirilmiş tersi ele alınmış; bu terslerin varlık koşulları ve temel özellikleri incelenmiştir [67, 68].

Bu çalışmalar, hiperdual sayıların yalnızca türev hesabında değil, aynı zamanda kinematik, dinamik ve lineer cebir alanlarında da sistematik ve kapsamlı bir çerçeveye sunduğunu göstermektedir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı, $n \times n$ hiperdual matrisler için determinant kavramına yeni bir yaklaşım sunmak ve karakteristik polinom, karakteristik kök, özdeğer ve özvektör kavramlarını sistematik bir çerçevede incelemektir. Literatürde bu kavramların hiperdual matrisler için genel ve sistematik bir biçimde ele alınmamış olması, bu alanda önemli bir boşluk oluşturmaktadır. Bu kapsamda, keyfi bir $n \times n$ hiperdual matris için determinant kavramının yeni bir yaklaşımla tanımlanması, karakteristik polinomun elde edilmesi ve karakteristik köklerin belirlenmesi amaçlanmıştır. Ayrıca, karakteristik köklerin hangi koşullar altında özdeğer olduğunun incelenmesi ve karşılık gelen özvektörlerin elde edilmesine ilişkin koşulların belirlenmesi hedeflenmiştir.

1.3 Tezin Özgün Katkıları

Bu tezde, bir $n \times n$ hiperdual matris için determinant kavramı yeni bir yaklaşımla tanımlanmış; bu determinant tanımı yardımıyla hiperdual matrisler için karakteristik polinom kavramı verilmiştir. Böylece, hiperdual matrislerin karakteristik köklerinin belirlenmesine yönelik yeni bir yaklaşım literatüre kazandırılmıştır. Diğer taraftan, karakteristik köklerin hangi koşullar altında özdeğer olduğu belirlenmiş ve bu koşullara bağlı olarak karşılık gelen özvektörler elde edilmiştir. Ayrıca, bir $n \times n$ hiperdual matrisin en fazla n özdeğere sahip olabileceği, hiç özdeğere sahip olmayabileceği ya da sonsuz sayıda özdeğere sahip olabileceği gösterilmiştir. Bu yönüyle çalışma, hiperdual matrislerin özdeğer ve özvektör yapısının daha kapsamlı biçimde anlaşılmasına katkı sağlamaktadır. Elde edilen teorik sonuçlar çeşitli örneklerle desteklenmiştir. Son olarak, literatürdeki dual teori kullanılarak özel bir tipteki 3×3 dual tridiagonal matrisler üzerinde; tezde elde edilen teorik sonuçlar kullanılarak ise özel bir tipteki 3×3 hiperdual tridiagonal matrisler üzerinde uygulama yapılmıştır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, dual sayılar, dual vektörler, dual matrisler ile hiperdual sayılar, hiperdual vektörler ve hiperdual matrislere ilişkin literatürde yer alan temel tanım, teorem ve sonuçlara yer verilmektedir [4–12, 14, 15, 17, 23, 26, 31, 43, 47, 48, 52, 53, 55, 65–67, 69–73].

2.1 Dual Sayılar, Dual Vektörler ve Dual Matrisler

Bu alt bölümde dual sayıların cebirsel yapısı ile dual vektör ve dual matris kavramlarına ilişkin temel bilgiler verilmektedir [4–12, 14, 15, 17, 23, 26, 31, 43, 69–72].

Tanım 2.1. Bir dual sayı, standart kısım a_s ve dual kısım a_d olmak üzere

$$\hat{a} = a_s + a_d\varepsilon, \quad a_s, a_d \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada ε dual birim olup

$$\varepsilon \neq 0, \quad \varepsilon^n = 0 \quad (n \geq 2)$$

$$0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0, \quad 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \quad r\varepsilon = \varepsilon r \quad (r \in \mathbb{R})$$

özelliklerini sağlar. Dual sayıların kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilir. $a_s = 0$ ise $\hat{a}$ pure dual sayı olarak adlandırılır [4–8].

Tanım 2.2. $\hat{a} = a_s + a_d\varepsilon, \hat{b} = b_s + b_d\varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $\mathbb{D}$ üzerinde eşitlik

$$\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow a_s = b_s \text{ ve } a_d = b_d$$

şeklinde tanımlanır [5, 11].

Tanım 2.3. $\hat{a} = a_s + a_d\varepsilon, \hat{b} = b_s + b_d\varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $\mathbb{D}$ üzerinde toplama işlemi

$$+ : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D},$$

$$(\hat{a}, \hat{b}) \mapsto \hat{a} + \hat{b} = (a_s + b_s) + (a_d + b_d)\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır [5, 11].

Tanım 2.4. $\hat{a} = a_s + a_d\varepsilon, \hat{b} = b_s + b_d\varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $\mathbb{D}$ üzerinde çarpma işlemi

$$\cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D},$$

$$(\hat{a}, \hat{b}) \mapsto \hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{a}\hat{b} = a_sb_s + (a_sb_d + a_db_s)\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır [5, 11].

Teorem 2.1. $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi, üzerinde tanımlı toplama ve çarpma işlemleri ile birimli ve değişmeli bir halka yapısı oluşturur [5, 14, 43, 69, 70].

İspat. $\forall \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{D}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) Toplamaya göre kapalılık: $\hat{a} + \hat{b} \in \mathbb{D}$.
- (ii) Toplamanın birleşme özelliği: $(\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} = \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c})$.
- (iii) Toplamanın değişme özelliği: $\hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a}$.
- (iv) Toplamsal birim : $\hat{0} = 0 + 0\varepsilon = 0$ olacak şekilde bir sıfır elemanı vardır ve

$$\hat{a} + \hat{0} = \hat{0} + \hat{a} = \hat{a}$$

eşitliği sağlanır.

- (v) Toplamsal ters: $\hat{a}$ sayısının toplamsal tersi $-\hat{a}$ ile gösterilir ve

$$\hat{a} + (-\hat{a}) = (-\hat{a}) + \hat{a} = \hat{0}$$

eşitliği sağlanır.

- (vi) Çarpmaya göre kapalılık: $\hat{a}\hat{b} \in \mathbb{D}$.
- (vii) Çarpmanın birleşme özelliği: $(\hat{a}\hat{b})\hat{c} = \hat{a}(\hat{b}\hat{c})$.
- (viii) Çarpmanın değişme özelliği: $\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a}$.
- (ix) Çarpımsal birim: $\hat{1} = 1 + 0\varepsilon = 1$ olacak şekilde bir birim eleman vardır ve

$$\hat{a}\hat{1} = \hat{1}\hat{a} = \hat{a}$$

eşitliği sağlanır.

(x) Çarpmanın toplama üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği:

$$\hat{a}(\hat{b} + \hat{c}) = (\hat{a}\hat{b}) + (\hat{a}\hat{c})$$

ve

$$(\hat{b} + \hat{c})\hat{a} = (\hat{b}\hat{a}) + (\hat{c}\hat{a})$$

eşitlikleri sağlanır.

Dolayısıyla $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi, birimli ve değişmeli bir halkadır. ■

Sonuç 2.1. $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür¹ [15, 43, 69, 70].

Teorem 2.2. $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır [15, 43, 69, 70].

İspat. Teorem 2.1 gereğince, $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi toplama işlemi altında değişmeli bir grup oluşturur. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\hat{a} = a_s + a_d\varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere, reel sayı ile dual sayının skaler çarpma işlemi

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D},$$

$$(\alpha, \hat{a}) \mapsto \alpha \odot \hat{a} = \alpha\hat{a} = \alpha a_s + \alpha a_d\varepsilon$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{D}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$(i) \quad \alpha(\hat{a} + \hat{b}) = \alpha\hat{a} + \alpha\hat{b},$$

$$(ii) \quad (\alpha + \beta)\hat{a} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{a},$$

$$(iii) \quad \alpha(\beta\hat{a}) = (\alpha\beta)\hat{a},$$

$$(iv) \quad 1\hat{a} = \hat{a}.$$

Dolayısıyla $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. ■

Bu bağlamda, dual sayılar halkası

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2) = \{a_s + a_d\varepsilon \mid a_s, a_d \in \mathbb{R}\} \quad (2.2)$$

¹ K halkası üzerinde tanımlı bir modül, kısaca K -modül olarak adlandırılır.

biçiminde de yazılabilir. Burada $\mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$, $\mathbb{R}[\varepsilon]$ halkasının² (ε^2) idealine göre bölüm halkasını ifade etmektedir [42, 43].

Tanım 2.5. $\hat{a} = a_s + a_d\varepsilon \in \mathbb{D}$ dual sayısının eşleniği

$$\overline{\hat{a}} = a_s - a_d\varepsilon \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır [5, 11].

Tanım 2.6. $\hat{a} = a_s + a_d\varepsilon \in \mathbb{D}$ için $a_s \neq 0$ olmak üzere çarpımsal ters

$$\hat{a}^{-1} = \frac{1}{\hat{a}} = \frac{1}{a_s} - \frac{a_d}{a_s^2}\varepsilon \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır [5, 11].

Tanım 2.7. $\hat{b} = b_s + b_d\varepsilon \in \mathbb{D}$ dual sayısının $\hat{a} = a_s + a_d\varepsilon \in \mathbb{D}$ dual sayısına bölümü, $a_s \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{\hat{b}}{\hat{a}} = \frac{b_s}{a_s} + \left(\frac{b_d}{a_s} - \frac{b_s a_d}{a_s^2} \right) \varepsilon \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır [5, 11].

Tanım 2.7 gereğince, $a_s \neq 0$ iken $\frac{\hat{b}}{\hat{a}}$ ifadesi iyi tanımlıdır. Buna karşılık, pure dual sayıların çarpımsal tersi mevcut değildir. Bu nedenle, dual sayılar kümesi cisim yapısı oluşturmaz [5, 69, 70].

Tanım 2.8. $\hat{a} = a_s + a_d\varepsilon$ ve $\hat{b} = b_s + b_d\varepsilon$ iki dual sayı olmak üzere, $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlanan total order “ $\leq$ ” bağıntısına göre iki dual sayının karşılaştırılması

$$\hat{a} < \hat{b} \Leftrightarrow (a_s < b_s) \text{ veya } (a_s = b_s \text{ ve } a_d < b_d)$$

şeklinde verilir. Eğer $\hat{a} > 0$ ise $\hat{a}$ pozitif dual sayı; eğer $\hat{a} \geq 0$ ise $\hat{a}$ negatif olmayan dual sayı olarak adlandırılır. Negatif olmayan dual sayıların kümesi $\mathbb{D}_+$, pozitif dual sayıların kümesi ise $\mathbb{D}_{++}$ ile gösterilir [26].

Tanım 2.9. $\hat{x} = x + x_0\varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere, bir dual değişkenli fonksiyon

$$f(\hat{x}) = f_s(\hat{x}) + f_d(\hat{x})\varepsilon \quad (2.6)$$

biçiminde ifade edilir. Burada f_s ve f_d reel değerli fonksiyonlar olup sırasıyla f fonksiyonunun reel ve dual bileşenlerini göstermektedir [31].

² $\mathbb{R}[\varepsilon]$, katsayıları reel sayılar olan ve ε bilinmeyen içeren polinomlar halkasını ifade eder [74].

Tanım 2.10. $\hat{x} = x + x_0\varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $f(\hat{x}) = f_s(\hat{x}) + f_d(\hat{x})\varepsilon$ dual değişkenli fonksiyonunun analitik olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_0} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f_s}{\partial x} = \frac{\partial f_d}{\partial x_0} \quad (2.7)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır [6, 10].

Teorem 2.3. $\hat{x} = x + x_0\varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $f(\hat{x})$ analitik fonksiyonunun x noktası etrafındaki Taylor açılımı

$$f(\hat{x}) = f(x + x_0\varepsilon) = f(x) + x_0f'(x)\varepsilon \quad (2.8)$$

biçimindedir. Burada $f'(x)$, f fonksiyonunun x noktasındaki türevini göstermektedir [9, 14].

İspat. Reel değişkenli bir f fonksiyonunun x noktası etrafındaki Taylor açılımı, (1.7) eşitliği kullanılarak

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \cdots$$

şeklinde yazılır [48]. Bu açılımda $h = x_0\varepsilon$ alınırsa

$$f(x + x_0\varepsilon) = f(x) + (x_0\varepsilon)f'(x) + \frac{(x_0\varepsilon)^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(x_0\varepsilon)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \cdots$$

elde edilir. (2.1) eşitliği gereğince, $k \geq 2$ için $(x_0\varepsilon)^k = 0$ olduğundan

$$f(\hat{x}) = f(x + x_0\varepsilon) = f(x) + x_0f'(x)\varepsilon$$

eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 2.2. $\hat{x} = x + x_0\varepsilon \in \mathbb{D}$ dual sayısı için (2.8) eşitliği yardımıyla aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir [11, 14]:

$$\begin{aligned} \sin(\hat{x}) &= \sin(x + x_0\varepsilon) = \sin x + x_0 \cos x \varepsilon, \\ \cos(\hat{x}) &= \cos(x + x_0\varepsilon) = \cos x - x_0 \sin x \varepsilon, \\ \cot(\hat{x}) &= \cot(x + x_0\varepsilon) = \cot x - \frac{x_0}{\sin^2 x} \varepsilon, \quad \sin x \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}^n &= (x + x_0\varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}x_0\varepsilon, \\ \sqrt{\hat{x}} &= \sqrt{x + x_0\varepsilon} = \sqrt{x} + \frac{x_0}{2\sqrt{x}}\varepsilon, \quad x > 0, \\ |\hat{x}| &= \sqrt{\hat{x}^2} = |x| + \frac{x}{|x|}x_0\varepsilon, \quad x \neq 0.\end{aligned}$$

Dual sayılarda mutlak değer kavramı, pure dual sayıları da kapsayacak biçimde genişletilmiştir:

Tanım 2.11. $|\cdot| : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}_+$ mutlak değer fonksiyonu $\hat{x} = x + x_0\varepsilon \in \mathbb{D}$ için

$$|\hat{x}| = \begin{cases} |x| + \operatorname{sgn}(x)x_0\varepsilon, & x \neq 0, \\ |x_0|\varepsilon, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır³ [26].

Teorem 2.4. $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{D}$ olmak üzere, mutlak değer fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır [26]:

- (i) $|\hat{x}| = 0 \Leftrightarrow \hat{x} = 0$.
- (ii) $|\hat{x}\hat{y}| = |\hat{x}||\hat{y}|$.
- (iii) $|\hat{x} + \hat{y}| \leq |\hat{x}| + |\hat{y}|$.

Tanım 2.12. Bir dual vektör

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

şeklinde gösterilir. Burada $\hat{x}_i \in \mathbb{D}$ dual sayılarına $\hat{\mathbf{x}}$ dual vektörünün bileşenleri denir. Dual vektörlerin kümesi $\mathbb{D}^n$ ile gösterilir [69–71].

Tanım 2.13. $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n) \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere, $\mathbb{D}^n$ üzerinde eşitlik

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \hat{x}_i = \hat{y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde tanımlanır. Toplama işlemi

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n &\rightarrow \mathbb{D}^n, \\ (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) &\mapsto \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} = (\hat{x}_1 + \hat{y}_1, \hat{x}_2 + \hat{y}_2, \dots, \hat{x}_n + \hat{y}_n),\end{aligned}$$

³Burada $\operatorname{sgn}(x)$ işaret fonksiyonunu göstermektedir. Herhangi bir $u \in \mathbb{R}$ için işaret fonksiyonu

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \\ -1, & u < 0 \end{cases}$$

şeklindedir.

ve $\hat{k} \in \mathbb{D}$ olmak üzere, dual sayı ile dual vektörün skaler çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^n &\rightarrow \mathbb{D}^n, \\ (\hat{k}, \hat{\mathbf{x}}) &\mapsto \hat{k}\hat{\mathbf{x}} = (\hat{k}\hat{x}_1, \hat{k}\hat{x}_2, \dots, \hat{k}\hat{x}_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [69, 71].

Teorem 2.5. $\mathbb{D}^n$ dual vektörler kümesi, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde serbest bir modüldür⁴ [69, 71].

$\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{D}^n$ dual vektörü

$$\hat{\mathbf{x}} = (x_{1s} + x_{1d}\varepsilon, x_{2s} + x_{2d}\varepsilon, \dots, x_{ns} + x_{nd}\varepsilon)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{x}_s = (x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns}) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_d = (x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd}) \in \mathbb{R}^n$$

olmak üzere, $\mathbf{x}_s$ vektörüne $\hat{\mathbf{x}}$ dual vektörünün standart vektör kısmı, $\mathbf{x}_d$ vektörüne ise dual vektör kısmı denir. Buna göre dual vektör

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_d\varepsilon \tag{2.10}$$

şeklinde yazılabilir [14].

Tanım 2.14. $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_d\varepsilon$ ve $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_s + \mathbf{y}_d\varepsilon$ olmak üzere, $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{D}^n$ dual vektörlerinin Öklidyen iç çarpımı

$$\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle = \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s \rangle + (\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_d \rangle + \langle \mathbf{x}_d, \mathbf{y}_s \rangle) \varepsilon$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\mathbf{x}_s \neq \mathbf{0}$ ise, $\hat{\mathbf{x}}$ dual vektörünün Öklidyen normu

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{x}}\| &= \sqrt{\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle} \\ &= \|\mathbf{x}_s\| + \frac{\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_d \rangle}{\|\mathbf{x}_s\|} \varepsilon \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [14, 17].

Tanım 2.15. $\nu : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, ν fonksiyonu $\mathbb{D}^n$ üzerinde bir norm olarak adlandırılır [26]:

⁴ K birimli ve değişmeli bir halka, M ise bir K -modül olsun. M 'nin bir B alt kümesi lineer bağımsız olup M 'yi üretiyorsa, B kümesine M 'nin bir tabanı denir. Eğer $M = \{0\}$ ise veya M bir tabana sahipse, M serbest modül olarak adlandırılır. Eğer B, M için bir taban ise, M modülü B üzerinde serbest modül olarak adlandırılır [74].

(i) $\forall \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{D}^n$ için $\nu(\hat{\mathbf{x}}) \geq 0$ ve $\nu(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{0}}$.

(ii) $\forall \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{D}^n$ ve $\forall \hat{a} \in \mathbb{D}$ için $\nu(\hat{a}\hat{\mathbf{x}}) = |\hat{a}| \nu(\hat{\mathbf{x}})$.

(iii) $\forall \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{D}^n$ için $\nu(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \leq \nu(\hat{\mathbf{x}}) + \nu(\hat{\mathbf{y}})$.

Tanım 2.16. $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere dual vektörler için 1-norm, ∞ -norm ve 2-norm aşağıdaki şekilde tanımlanır [26]:

• 1-norm:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i|.$$

• ∞ -norm:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |\hat{x}_i|.$$

• 2-norm:

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_2 = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\hat{x}_i|^2}, & \mathbf{x}_s \neq \mathbf{0}, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_{id}|^2} \varepsilon, & \mathbf{x}_s = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Önerme 2.1. 1-norm, ∞ -norm ve 2-norm, Tanım 2.15 ile verilen norm aksiyomlarını sağlar.

İspat. Öncelikle 1-norm için norm aksiyomlarının sağlandığını gösterelim. $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{D}^n$ olsun. Eğer $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{0}}$ ise $i = 1, 2, \dots, n$ için $\hat{x}_i = 0$ olur. Dolayısıyla $|\hat{x}_i| = 0$ ve $\|\hat{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i| = 0$ elde edilir.

Diğer taraftan, $\|\hat{\mathbf{x}}\|_1 = 0$ olsun. Bu durumda $\sum_{i=1}^n |\hat{x}_i| = 0$ olur. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $|\hat{x}_i| \geq 0$ olduğundan, bu toplamın sıfır olması ancak $|\hat{x}_i| = 0$ olmasıyla mümkündür. Dolayısıyla her i için $\hat{x}_i = 0$ elde edilir. Böylece $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{0}}$ olur ve norm aksiyomlarının (i) özelliği sağlanır.

Şimdi $\hat{a} \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\|\hat{a}\hat{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\hat{a}\hat{x}_i| = \sum_{i=1}^n |\hat{a}| |\hat{x}_i| = |\hat{a}| \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i| = |\hat{a}| \|\hat{\mathbf{x}}\|_1$$

olduğundan norm aksiyomlarının (ii) özelliği sağlanır.

Son olarak $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{D}^n$ için

$$\|\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i + \hat{y}_i| \leq \sum_{i=1}^n (|\hat{x}_i| + |\hat{y}_i|) = \|\hat{\mathbf{x}}\|_1 + \|\hat{\mathbf{y}}\|_1$$

elde edilir. Böylece norm aksiyomlarının (iii) özelliği de sağlanır.

∞ -norm için de ispat benzer şekilde yapılır ve norm özelliklerinin sağlandığı gösterilebilir.

2-normda ise $\mathbf{x}_s \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ durumları için norm aksiyomlarının sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir. ■

Tanım 2.17. Bir dual matris

$$\hat{A} = [\hat{a}_{ij}]_{m \times n}, \quad \hat{a}_{ij} \in \mathbb{D}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\hat{a}_{ij}$ dual sayılarına $\hat{A}$ dual matrisinin girdileri denir. Dual matrislerin kümesi $\mathbb{D}^{m \times n}$ ile gösterilir.

$\hat{A}$ dual matrisi reel matrisler cinsinden

$$\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon, \quad A_s, A_d \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A_s matrisine $\hat{A}$ dual matrisinin standart kısmı, A_d matrisine ise dual kısmı denir.

Tanım 2.18. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon$, $\hat{B} = B_s + B_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{m \times n}$ olmak üzere, iki dual matrisin eşitliği

$$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow A_s = B_s \text{ ve } A_d = B_d$$

şeklinde tanımlanır [71, 72].

Tanım 2.19. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon$, $\hat{B} = B_s + B_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{m \times n}$ olmak üzere, iki dual matrisin toplama işlemi

$$\begin{aligned} + : \mathbb{D}^{m \times n} \times \mathbb{D}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{D}^{m \times n} \\ (\hat{A}, \hat{B}) &\mapsto \hat{A} + \hat{B} = (A_s + B_s) + (A_d + B_d) \varepsilon \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [71, 72].

Tanım 2.20. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{m \times p}$ ve $\hat{B} = B_s + B_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{p \times n}$ olmak üzere, iki

dual matrisin çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{D}^{m \times p} \times \mathbb{D}^{p \times n} &\rightarrow \mathbb{D}^{m \times n}, \\ (\hat{A}, \hat{B}) &\mapsto \hat{A} \cdot \hat{B} = \hat{A}\hat{B} \\ &= A_s B_s + (A_s B_d + A_d B_s)\varepsilon \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [71, 72].

Teorem 2.6. $\mathbb{D}^{n \times n}$ dual matrisler kümesi, üzerinde tanımlı toplama ve çarpma işlemleri ile birimli bir halka yapısı oluşturur [72].

İspat. $\forall \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) Toplamaya göre kapalılık: $\hat{A} + \hat{B} \in \mathbb{D}^{n \times n}$.
- (ii) Toplamanın birleşme özelliği: $(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} = \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C})$.
- (iii) Toplamanın değişme özelliği: $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$.
- (iv) Toplamsal birim:

$$\hat{0}_{n \times n} = 0_{n \times n} + 0_{n \times n}\varepsilon = 0_{n \times n}$$

olacak şekilde bir sıfır matrisi vardır ve

$$\hat{A} + \hat{0}_{n \times n} = \hat{0}_{n \times n} + \hat{A} = \hat{A}$$

eşitliği sağlanır.

- (v) Toplamsal ters: $\hat{A}$ matrisinin toplamsal tersi $-\hat{A}$ ile gösterilir ve

$$\hat{A} + (-\hat{A}) = (-\hat{A}) + \hat{A} = \hat{0}_{n \times n}$$

eşitliği sağlanır.

- (vi) Çarpmaya göre kapalılık: $\hat{A}\hat{B} \in \mathbb{D}^{n \times n}$.
- (vii) Çarpmanın birleşme özelliği: $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$.
- (viii) Çarpımsal birim:

$$\hat{I}_{n \times n} = I_{n \times n} + 0_{n \times n}\varepsilon = I_{n \times n}$$

olacak şekilde birim matris vardır ve

$$\hat{A}\hat{I}_{n \times n} = \hat{I}_{n \times n}\hat{A} = \hat{A}$$

eşitliği sağlanır.

(ix) Çarpmanın toplama üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği:

$$\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = (\hat{A}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C})$$

ve

$$(\hat{B} + \hat{C})\hat{A} = (\hat{B}\hat{A}) + (\hat{C}\hat{A})$$

eşitlikleri sağlanır.

Dolayısıyla $\mathbb{D}^{n \times n}$ dual matrisler kümesi, birimli bir halkadır. ■

Genel olarak dual matrislerde çarpma işlemi değişme özelliğini sağlamaz. Buradan

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

olacak şekilde $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ dual matrisleri bulunabilir. Bu nedenle $\mathbb{D}^{n \times n}$, genel olarak değişmeli bir halka değildir.

Teorem 2.7. $\mathbb{D}^{m \times n}$ dual matrisler kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır [72].

İspat. Teorem 2.6 gereğince, $\mathbb{D}^{m \times n}$ dual matrisler kümesi toplama işlemi altında değişmeli bir grup oluşturur. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\hat{A} = A_s + A_d\varepsilon \in \mathbb{D}^{m \times n}$ olmak üzere, reel sayı ile dual matrisin skaler çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \circledast : \mathbb{R} \times \mathbb{D}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{D}^{m \times n}, \\ (\alpha, \hat{A}) &\mapsto \alpha \circledast \hat{A} = \alpha \hat{A} = \alpha A_s + \alpha A_d\varepsilon \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{D}^{m \times n}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) $\alpha(\hat{A} + \hat{B}) = \alpha\hat{A} + \alpha\hat{B}$,
- (ii) $(\alpha + \beta)\hat{A} = \alpha\hat{A} + \beta\hat{A}$,
- (iii) $\alpha(\beta\hat{A}) = (\alpha\beta)\hat{A}$,
- (iv) $1\hat{A} = \hat{A}$.

Dolayısıyla $\mathbb{D}^{m \times n}$ dual matrisler kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. ■

Teorem 2.8. $\mathbb{D}^{m \times n}$ dual matrisler kümesi, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür [72].

İspat. Teorem 2.6 gereğince, $\mathbb{D}^{m \times n}$ dual matrisler kümesi toplama işlemi altında değişmeli bir grup oluşturur. $\hat{\alpha} = \alpha_s + \alpha_d \varepsilon \in \mathbb{D}$ ve $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{m \times n}$ olmak üzere, dual sayı ile dual matrisin skaler çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \diamond : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{D}^{m \times n}, \\ (\hat{\alpha}, \hat{A}) &\mapsto \hat{\alpha} \diamond \hat{A} = \hat{\alpha} \hat{A} \\ &= \alpha_s A_s + (\alpha_s A_d + \alpha_d A_s) \varepsilon \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem, $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathbb{D}$ ve $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{D}^{m \times n}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) $\hat{\alpha}(\hat{A} + \hat{B}) = \hat{\alpha}\hat{A} + \hat{\alpha}\hat{B}$,
- (ii) $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})\hat{A} = \hat{\alpha}\hat{A} + \hat{\beta}\hat{A}$,
- (iii) $\hat{\alpha}(\hat{\beta}\hat{A}) = (\hat{\alpha}\hat{\beta})\hat{A}$,
- (iv) $\hat{1}\hat{A} = \hat{A}$.

Dolayısıyla $\mathbb{D}^{m \times n}$ dual matrisler kümesi, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür. ■

Önerme 2.2. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon$, $\hat{B} = B_s + B_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$ iki dual matris olsun. Burada $A_s, A_d, B_s, B_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [17, 23]:

- (i) $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$,
- (ii) $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}_{n \times n}$,
- (iii) $A_s B_s = I_{n \times n}$ ve $A_s B_d + A_d B_s = 0_{n \times n}$,
- (iv) $B_s = A_s^{-1}$ ve $B_d = -A_s^{-1} A_d A_s^{-1}$.

Önerme (2.2) gereğince, $\hat{A}$ dual matrisin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul, A_s matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. Bu durumda $\hat{A}$ dual matrisinin tersi, $\det(A_s) \neq 0$ için

$$\hat{A}^{-1} = A_s^{-1} - A_s^{-1} A_d A_s^{-1} \varepsilon, \quad (2.13)$$

şeklinde yazılır [23].

Teorem 2.3 yardımıyla, $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$ dual matrisi için f fonksiyonunun A_s noktası (matrisi) etrafındaki Taylor açılımı aşağıdaki şekilde verilir:

Önerme 2.3. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$ olsun. f fonksiyonunun A_s noktası etrafındaki Taylor açılımı

$$f(\hat{A}) = f(A_s + A_d \varepsilon) = f(A_s) + \text{iz} \left(\nabla f(A_s)^\top A_d \right) \varepsilon \quad (2.14)$$

şeklindedir. Burada $\text{iz} \left(\nabla f(A_s)^\top A_d \right)$, f fonksiyonunun A_s noktasında A_d yönündeki birinci mertebeden yönlü türevini⁵ göstermektedir [17].

Tanım 2.21. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{m \times n}$ olsun. $\hat{A}$ dual matrisinin eşleniği, transpozu ve eşlenik transpozu sırasıyla

- (i) Eşlenik: $\overline{\hat{A}} = A_s - A_d \varepsilon$.
- (ii) Transpoz: $\hat{A}^\top = A_s^\top + A_d^\top \varepsilon$.
- (iii) Eşlenik transpoz: $\hat{A}^* = A_s^\top - A_d^\top \varepsilon$.

şeklinde tanımlanır [72].

Tanım 2.22. $\hat{A} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ bir dual kare matris olsun. Buna göre $\hat{A}$ dual matrisi $\hat{A}^\top = \hat{A}$ ise dual simetrik, $\hat{A}^* = \hat{A}$ ise dual Hermit, $\hat{A}\hat{A}^* = \hat{A}^*\hat{A}$ ise dual normal ve $\hat{A}^*\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^* = \hat{I}_{n \times n}$ ise dual üniter matris olarak adlandırılır [72].

⁵ $g : \mathbb{R}^{k \times l} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ diferansiyellenebilir bir matris fonksiyonu olmak üzere, g fonksiyonunun $X \in \mathbb{R}^{k \times l}$ noktasında $Y \in \mathbb{R}^{k \times l}$ yönündeki birinci mertebeden yönlü türevi

$$D_Y g(X) = \left. \frac{d}{dt} g(X + tY) \right|_{t=0} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır [75]. Özel olarak, $g : \mathbb{R}^{k \times l} \rightarrow \mathbb{R}$ ise

$$D_Y g(X) = \langle \nabla g(X), Y \rangle_F = \text{iz} \left(\nabla g(X)^\top Y \right) \quad (2.16)$$

eşitliği sağlanır [75]. Burada $X = [X_{ij}] \in \mathbb{R}^{k \times l}$ olmak üzere, g fonksiyonunun X değişkenine göre gradyanı

$$\nabla g(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(X)}{\partial X_{11}} & \frac{\partial g(X)}{\partial X_{12}} & \cdots & \frac{\partial g(X)}{\partial X_{1l}} \\ \frac{\partial g(X)}{\partial X_{21}} & \frac{\partial g(X)}{\partial X_{22}} & \cdots & \frac{\partial g(X)}{\partial X_{2l}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g(X)}{\partial X_{k1}} & \frac{\partial g(X)}{\partial X_{k2}} & \cdots & \frac{\partial g(X)}{\partial X_{kl}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times l} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır [75]. Ayrıca $A, B \in \mathbb{R}^{k \times l}$ için $\langle A, B \rangle_F = \text{iz}(A^\top B)$ ifadesi Frobenius iç çarpımını göstermektedir [76].

2.2 Hiperdual Sayılar, Hiperdual Vektörler ve Hiperdual Matrisler

Bu bölümde hiperdual sayıların cebirsel yapısı ile hiperdual vektör ve hiperdual matris kavramlarına ilişkin temel bilgiler verilmektedir [47, 52, 53, 55, 65–67, 72, 73].

Tanım 2.23. Bir hiperdual sayı

$$a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*, \quad a_s, a_{d_1}, a_{d_2}, a_{d_3} \in \mathbb{R}, \quad (2.18)$$

biçiminde yazılır. Burada ε ve ε^* dual birimler olmak üzere, $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \varepsilon^3 = \dots = \varepsilon^n = 0, \\ (\varepsilon^*)^2 &= (\varepsilon^*)^3 = \dots = (\varepsilon^*)^n = 0, \\ \varepsilon\varepsilon^* &= \varepsilon^*\varepsilon \neq 0, \quad \varepsilon \neq 0, \quad \varepsilon^* \neq 0, \quad \varepsilon \neq \varepsilon^*, \quad \varepsilon \notin \mathbb{R}, \quad \varepsilon^* \notin \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.19)$$

özellikleri sağlanır. Hiperdual sayıların kümesi $\mathbb{HDD}$ ile gösterilir⁶. Eğer $a_s = 0$ ise,

$$a = a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$$

sayısına pure hiperdual sayı denir.

Tanım 2.24. $a \in \mathbb{HDD}$ hiperdual sayısı $\hat{a}_1 = a_s + a_{d_1}\varepsilon \in \mathbb{D}$ ve $\hat{a}_2 = a_{d_2} + a_{d_3}\varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$a = (a_s + a_{d_1}\varepsilon) + (a_{d_2} + a_{d_3}\varepsilon)\varepsilon^* = \hat{a}_1 + \hat{a}_2\varepsilon^* \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir [53].

Tanım 2.25. $a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$, $b = b_s + b_{d_1}\varepsilon + b_{d_2}\varepsilon^* + b_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HDD}$ olmak üzere, $\mathbb{HDD}$ üzerinde eşitlik

$$a = b \Leftrightarrow a_s = b_s, \quad a_{d_1} = b_{d_1}, \quad a_{d_2} = b_{d_2}, \quad a_{d_3} = b_{d_3}$$

şeklinde tanımlanır [47].

Tanım 2.26. $a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$, $b = b_s + b_{d_1}\varepsilon + b_{d_2}\varepsilon^* + b_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HDD}$

⁶Dual kuaterniyonlar kümesi, hiperdual sayılar kümesinin yapısına benzer biçimde tanımlanmaktadır. $a + bi + cj + dk$ formunda verilen bir dual kuaterniyonda i , j ve k nilpotent birimler olup

$$i^2 = j^2 = k^2 = 0, \quad ij = ji = ik = ki = jk = kj = 0$$

çarpım kurallarını sağlar [8, 77–79]. Bu yapıda üç farklı nilpotent birim bulunmakta ve farklı birimlerin çarpımları sıfır olmaktadır. Buna karşılık, hiperdual sayılar kümesinde (2.19) eşitliğinde görüldüğü üzere iki farklı nilpotent birim bulunmakta ve bu birimlerin çarpımı sıfırdan farklı olmaktadır. Dolayısıyla hiperdual sayı yapısı, burada ele alınan dual kuaterniyon yapısından farklıdır.

olmak üzere, $\mathbb{HID}$ üzerinde toplama işlemi

$$+ : \mathbb{HID} \times \mathbb{HID} \rightarrow \mathbb{HID},$$

$$(a, b) \mapsto a + b = (a_s + b_s) + (a_{d_1} + b_{d_1})\varepsilon$$

$$+ (a_{d_2} + b_{d_2})\varepsilon^* + (a_{d_3} + b_{d_3})\varepsilon\varepsilon^*$$

şeklinde tanımlanır [47].

Tanım 2.27. $a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$, $b = b_s + b_{d_1}\varepsilon + b_{d_2}\varepsilon^* + b_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HID}$ olmak üzere, $\mathbb{HID}$ üzerinde çarpma işlemi

$$\cdot : \mathbb{HID} \times \mathbb{HID} \rightarrow \mathbb{HID},$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b = ab$$

$$= a_s b_s + (a_s b_{d_1} + a_{d_1} b_s)\varepsilon$$

$$+ (a_s b_{d_2} + a_{d_2} b_s)\varepsilon^* + (a_s b_{d_3} + a_{d_1} b_{d_2} + a_{d_2} b_{d_1} + a_{d_3} b_s)\varepsilon\varepsilon^*$$

şeklinde tanımlanır [47].

Teorem 2.9. $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar kümesi, üzerinde tanımlı toplama ve çarpma işlemleri ile birimli ve değişmeli bir halka yapısı oluşturur [47, 72].

İspat. $\forall a, b, c \in \mathbb{HID}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) Toplamaya göre kapalılık: $a + b \in \mathbb{HID}$.

(ii) Toplamanın birleşme özelliği: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(iii) Toplamanın değişme özelliği: $a + b = b + a$.

(iv) Toplamsal birim : $0 = 0 + 0\varepsilon + 0\varepsilon^* + 0\varepsilon\varepsilon^*$ olacak şekilde bir sıfır elemanı vardır ve

$$a + 0 = 0 + a = a$$

eşitliği sağlanır.

(v) Toplamsal ters: a sayısının toplamsal tersi $-a$ olup

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

eşitliği sağlanır.

(vi) Çarpmaya göre kapalılık: $ab \in \mathbb{HID}$.

(vii) Çarpmanın birleşme özelliği: $(ab)c = a(bc)$.

(viii) Çarpmanın değişme özelliği: $ab = ba$.

(ix) Çarpımsal birim: $1 + 0\varepsilon + 0\varepsilon^* + 0\varepsilon\varepsilon^*$ olacak şekilde bir birim eleman vardır ve

$$a1 = 1a = a$$

eşitliği sağlanır.

(x) Çarpmanın toplama üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği:

$$a(b + c) = (ab) + (ac)$$

ve

$$(b + c)a = (ba) + (ca).$$

Dolayısıyla $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar kümesi, birimli ve değişmeli bir halkadır. ■

Sonuç 2.3. $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar kümesi, $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar halkası üzerinde bir modüldür [72].

Teorem 2.10. $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır [47].

İspat. Teorem 2.9 gereğince, hiperdual sayılar toplama işlemi altında değişmeli bir grup oluşturur. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HID}$ olmak üzere, reel sayı ile hiperdual sayının skaler çarpma işlemi

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{HID} \rightarrow \mathbb{HID},$$

$$(\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a = \alpha a$$

$$= \alpha a_s + \alpha a_{d_1}\varepsilon + \alpha a_{d_2}\varepsilon^* + \alpha a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{HID}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$(i) \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b,$$

$$(ii) \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a,$$

$$(iii) \quad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a,$$

$$(iv) \quad 1a = a.$$

Dolayısıyla $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. ■

Tanım 2.28. $a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HID}$ hiperdual sayısının eşleniği

$$\bar{a} = a_s - a_{d_1}\varepsilon - a_{d_2}\varepsilon^* - a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır [65, 66].

Tanım 2.29. $a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HID}$ olsun. $a_s \neq 0$ olmak üzere, a hiperdual sayısının çarpımsal tersi

$$a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{a_s} - \frac{a_{d_1}}{a_s^2}\varepsilon - \frac{a_{d_2}}{a_s^2}\varepsilon^* - \left(\frac{a_{d_3}}{a_s^2} - \frac{2a_{d_1}a_{d_2}}{a_s^3} \right) \varepsilon\varepsilon^* \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır [47].

Tanım 2.30. $b = b_s + b_{d_1}\varepsilon + b_{d_2}\varepsilon^* + b_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HID}$ hiperdual sayısının $a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HID}$ hiperdual sayısına bölümü, $a_s \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{b_s}{a_s} + \frac{b_{d_1}a_s - b_s a_{d_1}}{a_s^2} \varepsilon + \frac{b_{d_2}a_s - b_s a_{d_2}}{a_s^2} \varepsilon^* \\ &+ \left(\frac{b_{d_3}a_s^2 - b_{d_2}a_{d_1}a_s - b_{d_1}a_{d_2}a_s - b_s a_{d_3}a_s + 2b_s a_{d_1}a_{d_2}}{a_s^3} \right) \varepsilon\varepsilon^* \end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanır [47].

Tanım 2.30 gereğince, $a_s \neq 0$ iken $\frac{b}{a}$ ifadesi iyi tanımlıdır. Buna karşılık, pure hiperdual sayıların çarpımsal tersi mevcut değildir. Sonuç olarak, hiperdual sayıların cebiri $\mathbb{R}$ üzerinde bir bölüm cebiri değildir [47].

Tanım 2.31. $a = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 \varepsilon^*$ ve $b = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \varepsilon^*$ hiperdual sayıları arasındaki sıralama

$$a < b \Leftrightarrow (\hat{a}_1 < \hat{b}_1) \text{ veya } (\hat{a}_1 = \hat{b}_1 \text{ ve } \hat{a}_2 < \hat{b}_2)$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $a > 0$ ise a pozitif hiperdual sayı; eğer $a \geq 0$ ise a negatif olmayan hiperdual sayı olarak adlandırılır [67].

Teorem 2.11. $x = x_s + x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HID}$ hiperdual değişkeni için $f(x)$ fonksiyonunun x_s noktası etrafındaki Taylor açılımı

$$f(x) = f(x_s) + x_{d_1}f'(x_s)\varepsilon + x_{d_2}f'(x_s)\varepsilon^* + (x_{d_3}f'(x_s) + x_{d_1}x_{d_2}f''(x_s))\varepsilon\varepsilon^* \quad (2.24)$$

şeklindedir. Burada $f'(x_s)$ ve $f''(x_s)$ ifadeleri, sırasıyla, f fonksiyonunun x_s noktasındaki türevlerini göstermektedir [47, 52].

İspat. Reel değişkenli bir f fonksiyonunun x_s noktası etrafındaki Taylor açılımı (1.7) eşitliği kullanılarak

$$f(x_s + h) = f(x_s) + hf'(x_s) + \frac{h^2}{2!}f''(x_s) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_s) + \cdots$$

şeklinde verilir [48]. Bu açılımda $h = x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$ alınırsa

$$\begin{aligned} f(x_s + x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*) &= f(x_s) + (x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*)f'(x_s) \\ &\quad + \frac{(x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*)^2}{2!}f''(x_s) + \cdots \\ &\quad + \frac{(x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*)^n}{n!}f^{(n)}(x_s) + \cdots \end{aligned}$$

elde edilir. (2.19) eşitliğinde verilen dual birimlerin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*)^2 &= 2x_{d_1}x_{d_2}\varepsilon\varepsilon^*, \\ (x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*)^3 &= (x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*)(2x_{d_1}x_{d_2}\varepsilon\varepsilon^*) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n \geq 3$ için

$$(x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*)^n = 0$$

olur. Sonuç olarak,

$$f(x) = f(x_s) + x_{d_1}f'(x_s)\varepsilon + x_{d_2}f'(x_s)\varepsilon^* + (x_{d_3}f'(x_s) + x_{d_1}x_{d_2}f''(x_s))\varepsilon\varepsilon^*$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.4. $a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HDD}$ hiperdual sayısı için (2.24) eşitliği yardımıyla karekök ve mutlak değer fonksiyonları

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= \sqrt{a_s} + \frac{a_{d_1}}{2\sqrt{a_s}}\varepsilon + \frac{a_{d_2}}{2\sqrt{a_s}}\varepsilon^* + \left(\frac{a_{d_3}}{2\sqrt{a_s}} - \frac{a_{d_1}a_{d_2}}{4a_s\sqrt{a_s}} \right)\varepsilon\varepsilon^*, & a_s > 0, \\ |a| &= |a_s| + \frac{a_s}{|a_s|}a_{d_1}\varepsilon + \frac{a_s}{|a_s|}a_{d_2}\varepsilon^* + \frac{a_s}{|a_s|}a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*, & a_s \neq 0 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir [67, 73].

Tanım 2.32. $a = a_s + a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HDD}$ hiperdual sayısı için, (2.21)

eşitliğinde verilen eşlenik tanımına ek olarak

$$\begin{aligned}a_1^* &= a_s - a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* - a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*, \\a_2^* &= a_s - a_{d_1}\varepsilon - a_{d_2}\varepsilon^* + a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*, \\a_3^* &= a_s + a_{d_1}\varepsilon - a_{d_2}\varepsilon^* - a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*\end{aligned}$$

eşlenikleri tanımlanabilir [65]. Bu eşlenikler yardımıyla, hiperdual sayılar için farklı büyüklükler aşağıdaki gibi tanımlanabilir [65]:

$$\begin{aligned}|a|_1 &= \sqrt{aa_1^*} = |a_s| + \frac{a_s a_{d_2}}{|a_s|} \varepsilon^*, \\|a|_2 &= \sqrt{aa_2^*} = |a_s| + \frac{a_s a_{d_3} - a_{d_1} a_{d_2}}{|a_s|} \varepsilon\varepsilon^*, \\|a|_3 &= \sqrt{aa_3^*} = |a_s| + \frac{a_s a_{d_1}}{|a_s|} \varepsilon.\end{aligned}$$

Buna göre,

$$\frac{a_1^*}{|a|_1^2} = \frac{a_s - a_{d_1}\varepsilon + a_{d_2}\varepsilon^* - a_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*}{a_s^2 + 2a_s a_{d_2}\varepsilon^*} = a^{-1}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde, diğer eşlenik–büyüklük çiftleri için de aynı hesaplamalar yapıldığında, (2.22) eşitliğine ulaşıldığı görülür. Bir başka deyişle, $r = 1, 2, 3$ için

$$a^{-1} = \frac{a_r^*}{|a|_r^2},$$

bağıntısı geçerlidir [65].

Tanım 2.33. Bir hiperdual vektör

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

biçiminde gösterilir. Burada $x_i \in \mathbb{HD}$ hiperdual sayılarına X hiperdual vektörünün bileşenleri denir. Hiperdual vektörlerin kümesi $\mathbb{HD}^n$ ile gösterilir [55].

Tanım 2.34. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{HD}^n$ olmak üzere, $\mathbb{HD}^n$ üzerinde eşitlik

$$X = Y \Leftrightarrow x_i = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

şeklinde tanımlanır. Toplama işlemi

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{HD}^n \times \mathbb{HD}^n &\rightarrow \mathbb{HD}^n, \\(X, Y) &\mapsto X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),\end{aligned}$$

ve $c \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ olmak üzere, hiperdual sayı ile hiperdual vektörün skaler çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{H}\mathbb{D} \times \mathbb{H}\mathbb{D}^n &\rightarrow \mathbb{H}\mathbb{D}^n, \\ (c, \mathbf{X}) &\mapsto c\mathbf{X} = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [55, 65].

Teorem 2.12. $\mathbb{H}\mathbb{D}^n$ hiperdual vektörlerin kümesi, $\mathbb{H}\mathbb{D}$ hiperdual sayılar halkası üzerinde bir modüldür [65].

$\mathbf{X} \in \mathbb{H}\mathbb{D}^n$ hiperdual vektörü

$$\mathbf{X} = (x_{1s} + x_{1d_1}\varepsilon + x_{1d_2}\varepsilon^* + x_{1d_3}\varepsilon\varepsilon^*, \dots, x_{ns} + x_{nd_1}\varepsilon + x_{nd_2}\varepsilon^* + x_{nd_3}\varepsilon\varepsilon^*)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= (x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns}) \in \mathbb{R}^n, & \mathbf{x}_{d_1} &= (x_{1d_1}, x_{2d_1}, \dots, x_{nd_1}) \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{x}_{d_2} &= (x_{1d_2}, x_{2d_2}, \dots, x_{nd_2}) \in \mathbb{R}^n, & \mathbf{x}_{d_3} &= (x_{1d_3}, x_{2d_3}, \dots, x_{nd_3}) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

olmak üzere $\mathbf{X}$ hiperdual vektörü reel vektörler cinsinden

$$\mathbf{X} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_{d_1}\varepsilon + \mathbf{x}_{d_2}\varepsilon^* + \mathbf{x}_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \quad (2.26)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.35. $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{H}\mathbb{D}^n$ hiperdual vektörlerinin Öklidyen iç çarpımı

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

şeklinde tanımlanır [65].

Not 2.1. Hiperdual Öklidyen iç çarpım tarafından üretilen norm kavramı ele alındığında,

$\mathbf{X} = \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_{d_1}\varepsilon + \mathbf{x}_{d_2}\varepsilon^* + \mathbf{x}_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^n$ hiperdual vektörü için $\|\mathbf{X}\|^2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle$ alınırsa

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}\|^2 &= \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \\ &= \|\mathbf{x}_s\|^2 + 2\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{d_1} \rangle \varepsilon + 2\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{d_2} \rangle \varepsilon^* \\ &\quad + 2(\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{d_3} \rangle + \langle \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_2} \rangle) \varepsilon\varepsilon^* \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\|\mathbf{X}\|^2 \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ olur. Ancak $\|\mathbf{X}\|^2 \geq 0$ eşitsizliği hiperdual vektörler için her zaman sağlanamayabilir. Nitekim, $\mathbf{X} = \mathbf{x}_{d_1}\varepsilon + \mathbf{x}_{d_2}\varepsilon^* + \mathbf{x}_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^n$

hiperdual vektörü için

$$\begin{aligned}\|X\|^2 &= \langle \mathbf{x}_{d_1}\varepsilon + \mathbf{x}_{d_2}\varepsilon^* + \mathbf{x}_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*, \mathbf{x}_{d_1}\varepsilon + \mathbf{x}_{d_2}\varepsilon^* + \mathbf{x}_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_2} \rangle \varepsilon\varepsilon^*\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\langle \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_2} \rangle < 0$ olması durumunda, $\|X\|^2 < 0$ olur. Bu durum göz önünde bulundurularak, aşağıdaki tanımda $\mathbb{HDD}_0^n$ kümesi üzerinde $\|X\|^2 \geq 0$ koşulunu sağlayan bir norm tanımlanmaktadır [67].

Tanım 2.36.

$$\mathbb{HDD}_0^n = \left\{ \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_{d_1}\varepsilon + \mathbf{x}_{d_2}\varepsilon^* + \mathbf{x}_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \mid \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_2}, \mathbf{x}_{d_3} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_s \neq \mathbf{0} \text{ veya } \mathbf{x}_s = \mathbf{0} \text{ ve } \langle \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_2} \rangle \geq 0 \right\}$$

kümesi verilsin. Buna göre, $X \in \mathbb{HDD}_0^n$ için X hiperdual vektörünün Öklidyen normu aşağıdaki şekilde tanımlanır [67]:

- Eğer $\mathbf{x}_s \neq \mathbf{0}$ ise

$$\begin{aligned}\|X\| &= \|\mathbf{x}_s\| + \frac{\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{d_1} \rangle}{\|\mathbf{x}_s\|} \varepsilon + \frac{\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{d_2} \rangle}{\|\mathbf{x}_s\|} \varepsilon^* \\ &\quad + \left(\frac{\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{d_3} \rangle + \langle \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_2} \rangle}{\|\mathbf{x}_s\|} - \frac{\langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{d_1} \rangle \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{d_2} \rangle}{\|\mathbf{x}_s\|^3} \right) \varepsilon\varepsilon^*.\end{aligned}$$

- Eğer $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{d_1} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{d_2} \neq \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_2} \rangle \geq 0$ ise

$$\|X\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_2} \rangle} \varepsilon + \sqrt{\langle \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_2} \rangle} \varepsilon^* + \|\mathbf{x}_{d_3}\| \varepsilon\varepsilon^*.$$

- Eğer $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_{d_2} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{d_1} \neq \mathbf{0}$ ise

$$\|X\| = \|\mathbf{x}_{d_1}\| \varepsilon + 2 \frac{\langle \mathbf{x}_{d_1}, \mathbf{x}_{d_3} \rangle}{\|\mathbf{x}_{d_1}\|} \varepsilon\varepsilon^*.$$

- Eğer $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_{d_1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{d_2} \neq \mathbf{0}$ ise

$$\|X\| = \|\mathbf{x}_{d_2}\| \varepsilon^* + 2 \frac{\langle \mathbf{x}_{d_2}, \mathbf{x}_{d_3} \rangle}{\|\mathbf{x}_{d_2}\|} \varepsilon\varepsilon^*.$$

- Eğer $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_{d_1} = \mathbf{x}_{d_2} = \mathbf{0}$ ise

$$\|X\| = \|\mathbf{x}_{d_3}\| \varepsilon\varepsilon^*.$$

- Eğer $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_{d_1} = \mathbf{x}_{d_2} = \mathbf{x}_{d_3} = \mathbf{0}$ ise

$$\|X\| = 0.$$

Böylece $X \in \mathbb{HID}_0^n$ için $\|X\|^2 \geq 0$ elde edilir.

Tanım 2.37. Bir hiperdual matris

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad a_{ij} \in \mathbb{HID}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlanır. Burada a_{ij} hiperdual sayılarına A hiperdual matrisinin girdileri denir. Hiperdual matrislerin kümesi $\mathbb{HID}^{m \times n}$ ile gösterilir.

A hiperdual matrisi reel matrisler cinsinden

$$A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^\star + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^\star, \quad A_s, A_{d_1}, A_{d_2}, A_{d_3} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada A_s matrisine standart kısım, $A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^\star + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^\star$ ifadesine hiperdual kısım adı verilir.

Ayrıca, A hiperdual matrisi, dual matrisler cinsinden

$$A = D + D'\varepsilon^\star, \quad D, D' \in \mathbb{D}^{m \times n} \quad (2.29)$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 2.38. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^\star + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^\star$, $B = B_s + B_{d_1}\varepsilon + B_{d_2}\varepsilon^\star + B_{d_3}\varepsilon\varepsilon^\star$ olmak üzere, $A, B \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrislerinin eşitliği

$$A = B \Leftrightarrow A_s = B_s, \quad A_{d_1} = B_{d_1}, \quad A_{d_2} = B_{d_2}, \quad A_{d_3} = B_{d_3}$$

şeklinde tanımlanır [72].

Tanım 2.39. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^\star + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^\star$, $B = B_s + B_{d_1}\varepsilon + B_{d_2}\varepsilon^\star + B_{d_3}\varepsilon\varepsilon^\star$ olmak üzere, $A, B \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrislerinin toplama işlemi

$$\begin{aligned} + : \mathbb{HID}^{m \times n} \times \mathbb{HID}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{HID}^{m \times n}, \\ (A, B) &\mapsto A + B = (A_s + B_s) + (A_{d_1} + B_{d_1})\varepsilon \\ &\quad + (A_{d_2} + B_{d_2})\varepsilon^\star + (A_{d_3} + B_{d_3})\varepsilon\varepsilon^\star \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [72].

Tanım 2.40. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^\star + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^\star$, $B = B_s + B_{d_1}\varepsilon + B_{d_2}\varepsilon^\star + B_{d_3}\varepsilon\varepsilon^\star$

olmak üzere, $A, B \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrislerinin çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{HID}^{m \times p} \times \mathbb{HID}^{p \times n} &\rightarrow \mathbb{HID}^{m \times n}, \\ (A, B) &\mapsto A \cdot B = A_s B_s \\ &\quad + (A_s B_{d_1} + A_{d_1} B_s) \varepsilon + (A_s B_{d_2} + A_{d_2} B_s) \varepsilon^* \\ &\quad + (A_s B_{d_3} + A_{d_1} B_{d_2} + A_{d_2} B_{d_1} + A_{d_3} B_s) \varepsilon \varepsilon^* \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [72].

Teorem 2.13. $\mathbb{HID}^{n \times n}$ hiperdual matrisler kümesi, üzerinde tanımlı toplama ve çarpma işlemleri ile birimli bir halka yapısı oluşturur [72].

İspat. $\forall A, B, C \in \mathbb{HID}^{n \times n}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) Toplamaya göre kapalılık: $A + B \in \mathbb{HID}^{n \times n}$.
- (ii) Toplamanın birleşme özelliği: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- (iii) Toplamanın değişme özelliği: $A + B = B + A$.
- (iv) Toplamsal birim : $0_{m \times n} = 0_{m \times n} + 0_{m \times n} \varepsilon + 0_{m \times n} \varepsilon^* + 0_{m \times n} \varepsilon \varepsilon^* = 0_{m \times n}$ olacak şekilde bir sıfır matrisi vardır ve

$$A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$$

eşitliği sağlanır.

- (v) Toplamsal ters: A hiperdual matrisinin toplamsal tersi $-A$ olup

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$$

eşitliği sağlanır.

- (vi) Çarpmaya göre kapalılık: $AB \in \mathbb{HID}^{n \times n}$.
- (vii) Çarpmanın birleşme özelliği: $(AB)C = A(BC)$.
- (viii) Çarpımsal birim: $I_{n \times n} = I_{n \times n} + 0_{n \times n} \varepsilon + 0_{n \times n} \varepsilon^* + 0_{n \times n} \varepsilon \varepsilon^* = I_{n \times n}$ olacak şekilde bir birim matris vardır ve

$$A I_{n \times n} = I_{n \times n} A = A$$

eşitliği sağlanır.

(ix) Çarpmanın toplama üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği:

$$A(B + C) = (AB) + (AC)$$

ve

$$(B + C)A = (BA) + (CA)$$

eşitlikleri sağlanır.

Dolayısıyla $\mathbb{HID}^{n \times n}$ hiperdual matrisler kümesi, birimli bir halkadır. ■

Genel olarak hiperdual matrislerde çarpma işlemi değişme özelliğini sağlamaz. Buradan

$$AB \neq BA$$

olacak şekilde $A, B \in \mathbb{HID}^{n \times n}$ hiperdual matrisleri bulunabilir. Bu nedenle $\mathbb{HID}^{n \times n}$, genel olarak değişmeli bir halka değildir.

Teorem 2.14. $\mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrisler kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır [72].

İspat. Teorem 2.13 gereğince, hiperdual matrisler kümesi toplama işlemi altında değişmeli bir grup oluşturur. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ olmak üzere, reel sayı ile hiperdual matrisin skaler çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \square : \mathbb{R} \times \mathbb{HID}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{HID}^{m \times n}, \\ (\alpha, A) &\mapsto \alpha \square A = \alpha A \\ &= \alpha A_s + \alpha A_{d_1}\varepsilon + \alpha A_{d_2}\varepsilon^* + \alpha A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $A, B \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- (ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- (iii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
- (iv) $1A = A$.

Dolayısıyla $\mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrisler kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. ■

Teorem 2.15. $\mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrisler kümesi, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür [72].

İspat. Teorem 2.13 gereğince, $\mathbb{HID}^{m \times n}$ toplama işlemi altında değişmeli bir gruptur. $\hat{\alpha} = \alpha_s + \alpha_d \varepsilon \in \mathbb{D}$ ve $A = A_s + A_{d_1} \varepsilon + A_{d_2} \varepsilon^* + A_{d_3} \varepsilon \varepsilon^* \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ olmak üzere, dual sayı ile hiperdual matrisin skaler çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \diamond : \mathbb{D} \times \mathbb{HID}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{HID}^{m \times n}, \\ (\hat{\alpha}, A) &\mapsto \hat{\alpha} \diamond A = \hat{\alpha} A \\ &= \alpha_s A_s + (\alpha_s A_{d_1} + \alpha_d A_s) \varepsilon \\ &\quad + \alpha_s A_{d_2} \varepsilon^* + (\alpha_s A_{d_3} + \alpha_d A_{d_2}) \varepsilon \varepsilon^* \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem, $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathbb{D}$ ve $A, B \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) $\hat{\alpha}(A + B) = \hat{\alpha}A + \hat{\alpha}B$,
- (ii) $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})A = \hat{\alpha}A + \hat{\beta}A$,
- (iii) $\hat{\alpha}(\hat{\beta}A) = (\hat{\alpha}\hat{\beta})A$,
- (iv) $\hat{1}A = A$.

Dolayısıyla $\mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrisler kümesi, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür. ■

Teorem 2.16. $\mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrisler kümesi, $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar halkası üzerinde bir modüldür [72].

İspat. Teorem 2.13 gereğince, hiperdual matrisler kümesi toplama işlemi altında değişmeli bir grup oluşturur. $\alpha = \alpha_s + \alpha_{d_1} \varepsilon + \alpha_{d_2} \varepsilon^* + \alpha_{d_3} \varepsilon \varepsilon^* \in \mathbb{HID}$ ve $A = A_s + A_{d_1} \varepsilon + A_{d_2} \varepsilon^* + A_{d_3} \varepsilon \varepsilon^* \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ olmak üzere, hiperdual sayı ile hiperdual matrisin skaler çarpma işlemi

$$\begin{aligned} \circ : \mathbb{HID} \times \mathbb{HID}^{m \times n} &\rightarrow \mathbb{HID}^{m \times n}, \\ (\alpha, A) &\mapsto \alpha \circ A = \alpha A \\ &= \alpha_s A_s \\ &\quad + (\alpha_s A_{d_1} + \alpha_{d_1} A_s) \varepsilon + (\alpha_s A_{d_2} + \alpha_{d_2} A_s) \varepsilon^* \\ &\quad + (\alpha_s A_{d_3} + \alpha_{d_1} A_{d_2} + \alpha_{d_2} A_{d_1} + \alpha_{d_3} A_s) \varepsilon \varepsilon^* \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem, $\alpha, \beta \in \mathbb{HID}$ ve $A, B \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- (ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- (iii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
- (iv) $1A = A$.

Dolayısıyla $\mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrisler kümesi, $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar halkası üzerinde bir modüldür. ■

Önerme 2.4. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$, $B = B_s + B_{d_1}\varepsilon + B_{d_2}\varepsilon^* + B_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$ olmak üzere, $A, B \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ hiperdual matrisleri için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [66, 72]:

- (i) $B = A^{-1}$,
- (ii) $AB = I_{n \times n}$,
- (iii)
$$\left\{ \begin{array}{l} A_s B_s = I_{n \times n}, \\ A_s B_{d_1} + A_{d_1} B_s = 0_{n \times n}, \\ A_s B_{d_2} + A_{d_2} B_s = 0_{n \times n}, \\ A_s B_{d_3} + A_{d_1} B_{d_2} + A_{d_2} B_{d_1} + A_{d_3} B_s = 0_{n \times n}, \end{array} \right.$$
- (iv)
$$\left\{ \begin{array}{l} B_s = A_s^{-1}, \\ B_{d_1} = -A_s^{-1} A_{d_1} A_s^{-1}, \\ B_{d_2} = -A_s^{-1} A_{d_2} A_s^{-1}, \\ B_{d_3} = A_s^{-1} (-A_{d_3} + A_{d_1} A_s^{-1} A_{d_2} + A_{d_2} A_s^{-1} A_{d_1}) A_s^{-1}. \end{array} \right.$$

Tanım 2.41. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{HID}^{m \times n}$ bir hiperdual matris olsun. A hiperdual matrisinin eşleniği, transpozu ve eşlenik transpozu sırasıyla

- (i) Eşlenik: $\bar{A} = A_s - A_{d_1}\varepsilon - A_{d_2}\varepsilon^* - A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$,
- (ii) Transpoz: $A^\top = A_s^\top + A_{d_1}^\top \varepsilon + A_{d_2}^\top \varepsilon^* + A_{d_3}^\top \varepsilon\varepsilon^*$,
- (iii) Eşlenik transpoz: $A^* = A_s^\top - A_{d_1}^\top \varepsilon - A_{d_2}^\top \varepsilon^* - A_{d_3}^\top \varepsilon\varepsilon^*$

şeklinde tanımlanır [66, 72].

Not 2.2. Önerme 2.4 gereğince, A hiperdual matrisin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul, A_s matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır. Bu durumda A hiperdual matrisinin tersi, $\det(A_s) \neq 0$ için

$$A^{-1} = A_s^{-1} \left[\bar{A} + (A_{d_1} A_s^{-1} A_{d_2} + A_{d_2} A_s^{-1} A_{d_1}) \varepsilon \varepsilon^* \right] A_s^{-1}, \quad (2.30)$$

şeklinde yazılır [66, 72].

Tanım 2.42. $A \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{n \times n}$ bir hiperdual kare matris olsun. Buna göre A hiperdual matrisi; $A^\top = A$ ise hiperdual simetrik, $A^* = A$ ise hiperdual Hermit, $AA^* = A^*A$ ise hiperdual normal ve $A^*A = AA^* = I_{n \times n}$ ise hiperdual üniter matris olarak adlandırılır [66, 72].



DUAL MATRİSLERDE DETERMİNANT, KARAKTERİSTİK POLİNOM, KARAKTERİSTİK KÖK, ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖR TEORİSİ

Bu bölümde, dual matrislerin determinant, karakteristik polinom, karakteristik kök, özdeğer-özvektör kavramları incelenecektir [17, 24, 25, 27, 36, 37, 71, 74, 76, 80]. Ardından, çeşitli örneklerle yer verilecektir.

Tanım 3.1. K , birimi 1 olan değişmeli bir halka, $V_1, \dots, V_n$ ve W birer K -modül olsun. $f : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ fonksiyonu, $1 \leq k \leq n$ olmak üzere, her $\alpha, \beta \in V_k$ ve $r, s \in K$ için

$$f(\alpha_1, \dots, r\alpha + s\beta, \dots, \alpha_n) = rf(\alpha_1, \dots, \alpha, \dots, \alpha_n) + sf(\alpha_1, \dots, \beta, \dots, \alpha_n)$$

eşitliğini sağlıyorsa çok lineer fonksiyon olarak adlandırılır. n değişkenli çok lineer bir fonksiyon, aynı zamanda n -lineer fonksiyon olarak da adlandırılır [74, 80].

Tanım 3.2. K , birimi 1 olan değişmeli bir halka, V bir K -modül ve $f : V^n \rightarrow K$ n -lineer bir fonksiyon olsun. Bazı $i \neq j$ için $\alpha_i = \alpha_j$ olduğunda

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonu alterne n -lineer fonksiyon olarak adlandırılır [74, 80].

Tanım 3.3. K , birimi 1 olan değişmeli bir halka ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, K^n modülünün standart tabanı olmak üzere $f : K^n \times K^n \times \dots \times K^n \rightarrow K$ fonksiyonu, $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ eşitliğini sağlayan alterne n -lineer bir fonksiyon¹ olsun.

¹ K^n modülünün standart tabanı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere, $f(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ eşitliğini sağlayan tek bir $f : K^n \times K^n \times \dots \times K^n \rightarrow K$ alterne n -lineer fonksiyonu vardır [80].

$A = [a_{ij}] \in K^{n \times n}$ matrisinin j . sütunu, $1 \leq j \leq n$ için

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

olup K^n modülünün bir elemanıdır. A matrisinin sütun vektörleri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere, $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K$ değerine A matrisinin determinanı denir. Bu durumda f ,

$$f = \det : K^n \times K^n \times \dots \times K^n \rightarrow K, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mapsto \det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

biçimindeki determinant fonksiyonudur ve

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n}$$

şeklinde ifade edilir. Burada toplam $n!$ terimden oluşmakta olup $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ dizisi, satır indislerinin tüm permütasyonları üzerinden alınır. $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$ ise $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permütasyonunun inversiyon sayısını göstermektedir [80].

Teorem 2.1 gereğince, $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi, üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır. Ayrıca Teorem 2.5 gereğince, $\mathbb{D}^n$ dual vektörler kümesi, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde serbest bir modül oluşturur. Bu nedenle, Tanım 3.3 $K = \mathbb{D}$ alınarak dual matrisler için ifade edilebilir. Buna göre, $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}] \in \mathbb{D}^{n \times n}$ dual matrisinin determinanı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 3.4. $\det : \mathbb{D}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{D}$ olmak üzere, $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}] \in \mathbb{D}^{n \times n}$ dual matrisinin determinanı

$$\det[\hat{A}] = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} \hat{a}_{1j_1} \hat{a}_{2j_2} \dots \hat{a}_{nj_n} \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada toplam $n!$ terimden oluşmakta olup, $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ dizisi $\hat{a}_{ij}$ elemanlarının sütun indislerinin tüm permütasyonları üzerinden alınır. Ayrıca $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$, $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permütasyonundaki inversion sayısını göstermektedir [25, 36].

Teorem 3.1. $\hat{A} = (\hat{\mathbf{a}}_1; \dots; \hat{\mathbf{a}}_i; \dots; \hat{\mathbf{a}}_j; \dots; \hat{\mathbf{a}}_n) \in \mathbb{D}^{n \times n}$ ve $\hat{\alpha} \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $\hat{A}$ dual matrisinin k . satırı $i < j$ için $\hat{\mathbf{a}}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) olsun. Bu durumda,

aşağıdaki özellikler sağlanır [25, 36]:

- (i) $\det[\hat{A}^\top] = \det[\hat{A}]$,
- (ii) $\det[\hat{D}] = -\det[\hat{A}]$, $\hat{D} = (\hat{\mathbf{a}}_1; \dots; \hat{\mathbf{a}}_{i-1}; \hat{\mathbf{a}}_j; \hat{\mathbf{a}}_{i+1}; \dots; \hat{\mathbf{a}}_{j-1}; \hat{\mathbf{a}}_i; \hat{\mathbf{a}}_{j+1}; \dots; \hat{\mathbf{a}}_n)$,
- (iii) $\det[\hat{D}] = \hat{\alpha} \det[\hat{A}]$, $\hat{D} = (\hat{\mathbf{a}}_1; \dots; \hat{\mathbf{a}}_{i-1}; \hat{\alpha} \hat{\mathbf{a}}_i; \hat{\mathbf{a}}_{i+1}; \dots; \hat{\mathbf{a}}_n)$,
- (iv) $\det[\hat{D}] = \det[\hat{A}]$, $\hat{D} = (\hat{\mathbf{a}}_1; \dots; \hat{\mathbf{a}}_{i-1}; \hat{\mathbf{a}}_i + \hat{\alpha} \hat{\mathbf{a}}_j; \hat{\mathbf{a}}_{i+1}; \dots; \hat{\mathbf{a}}_n)$,
- (v) $\det[\hat{C}] = \det[\hat{A}] + \det[\hat{D}]$, $\hat{D} = (\hat{\mathbf{a}}_1; \dots; \hat{\mathbf{a}}_{i-1}; \hat{\mathbf{b}}_i; \hat{\mathbf{a}}_{i+1}; \dots; \hat{\mathbf{a}}_n)$ ve $\hat{C} = (\hat{\mathbf{a}}_1; \dots; \hat{\mathbf{a}}_{i-1}; \hat{\mathbf{a}}_i + \hat{\mathbf{b}}_i; \hat{\mathbf{a}}_{i+1}; \dots; \hat{\mathbf{a}}_n)$.

İspat. (i) $\hat{A}^\top$ matrisinin determinantı (3.1) eşitliği yardımıyla

$$\det[\hat{A}^\top] = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} \hat{a}_{j_1 1} \hat{a}_{j_2 2} \cdots \hat{a}_{j_n n}$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan, $\sigma(k) = j_k$ olmak üzere

$$\hat{a}_{j_1 1} \hat{a}_{j_2 2} \cdots \hat{a}_{j_n n} = \hat{a}_{1\sigma^{-1}(1)} \hat{a}_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots \hat{a}_{n\sigma^{-1}(n)}$$

yazılabilir. Burada σ^{-1} de bir permütasyon olup $\tau(\sigma) = \tau(\sigma^{-1})$ olduğundan, bu ifade (3.1) eşitliği ile aynıdır. Dolayısıyla $\det[\hat{A}^\top] = \det[\hat{A}]$ elde edilir.

(ii), (iii), (iv) ve (v) maddelerinin ispatları da benzer şekilde yapılır. ■

Teorem 3.2. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$ dual matrisinin determinantı

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s] + \left(\sum_{i=1}^n \det[A(i)] \right) \varepsilon \quad (3.2)$$

şeklindedir. Burada $A(i)$ matrisi aşağıdaki şekilde verilir [25, 71]:

$$A(i) = \begin{bmatrix} (a_{11})_s & (a_{12})_s & \cdots & (a_{1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i-11})_s & (a_{i-12})_s & \cdots & (a_{i-1n})_s \\ (a_{i1})_d & (a_{i2})_d & \cdots & (a_{in})_d \\ (a_{i+11})_s & (a_{i+12})_s & \cdots & (a_{i+1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_s & (a_{n2})_s & \cdots & (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

İspat. $\hat{a}_i = (a_i)_s + (a_i)_d \varepsilon \in \mathbb{D}, i = 1, 2, \dots, n$, olmak üzere

$$\prod_{i=1}^n \hat{a}_i = \prod_{i=1}^n (a_i)_s + \left(\begin{aligned} &(a_1)_d (a_2)_s \cdots (a_n)_s + (a_1)_s (a_2)_d (a_3)_s \cdots (a_n)_s \\ &+ \cdots + (a_1)_s (a_2)_s \cdots (a_{n-1})_s (a_n)_d \end{aligned} \right) \varepsilon$$

olduğundan, Tanım 3.4 gereğince

$$\begin{aligned} \det[\hat{A}] = & \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} (a_{1j_1})_s (a_{2j_2})_s \cdots (a_{nj_n})_s \\ & + \left(\sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} \sum_{i=1}^n (a_{1j_1})_s \cdots (a_{i-1j_{i-1}})_s (a_{ij_i})_d (a_{i+1j_{i+1}})_s \cdots (a_{nj_n})_s \right) \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, determinant tanımından $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\det[A(i)] = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} (a_{1j_1})_s \cdots (a_{i-1j_{i-1}})_s (a_{ij_i})_d (a_{i+1j_{i+1}})_s \cdots (a_{nj_n})_s$$

yazılır [76]. Böylece

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s] + \left(\sum_{i=1}^n \det[A(i)] \right) \varepsilon$$

elde edilir ve ispat tamamlanır [25].

Alternatif olarak aşağıdaki şekilde de ispat yapılabilir:

(2.14) eşitliğindeki f fonksiyonu determinant fonksiyonu olarak alınırsa

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s + A_d \varepsilon] = \det[A_s] + \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_d \right) \varepsilon \quad (3.4)$$

elde edilir [17]. Buna göre, (2.15) ve (2.16) eşitlikleri kullanılarak

$$\text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_d \right) = \left. \frac{d}{dt} \det[A_s + t A_d] \right|_{t=0}$$

yazılabilir [75]. Böylece (3.4) eşitliği

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s] + \left. \frac{d}{dt} \det[A_s + t A_d] \right|_{t=0} \varepsilon \quad (3.5)$$

formunu alır. A_s ve A_d matrislerinin i . satırları sırasıyla $(a_s)_i$ ve $(a_d)_i$ olmak üzere

$i = 1, 2, \dots, n$ için

$$A_s + tA_d = \begin{bmatrix} (a_s)_1 + t(a_d)_1 \\ (a_s)_2 + t(a_d)_2 \\ \vdots \\ (a_s)_n + t(a_d)_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Tanım 3.3 gereğince, determinant fonksiyonu n -lineer olduğundan

$$\begin{aligned} \det[A_s + tA_d] &= \det((a_s)_1, (a_s)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + t \det((a_d)_1, (a_s)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + t \det((a_s)_1, (a_d)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + t \det((a_s)_1, (a_s)_2, \dots, (a_d)_n) + \mathcal{O}(t^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mathcal{O}(t^2)$, en az iki satırın A_d matrisinin satırlarından seçildiği terimlerin toplamını ifade etmektedir. Böylece

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \det[A_s + tA_d] \right|_{t=0} &= \det((a_d)_1, (a_s)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + \det((a_s)_1, (a_d)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \det((a_s)_1, (a_s)_2, \dots, (a_d)_n) \end{aligned}$$

olur. $A(i)$, A_s matrisinin i . satırı yerine A_d matrisinin i . satırı yazılarak elde edilen matris olmak üzere

$$\left. \frac{d}{dt} \det[A_s + tA_d] \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \det[A(i)]$$

yazılabilir. Bu ifade (3.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s] + \left(\sum_{i=1}^n \det[A(i)] \right) \varepsilon$$

elde edilir. ■

Örnek 3.1. Aşağıdaki dual matrisi ele alalım:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathbb{D}^{3 \times 3}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $A(i)$ matrisinin (3.3) eşitliğinde verilen tanımı gereğince

$$\det[A(1)] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[A(2)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[A(3)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

elde edilir. Ayrıca $\det[A_s] = 1$ olduğundan,

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s] + \left(\sum_{i=1}^3 \det[A(i)] \right) \varepsilon = 1 + \varepsilon$$

elde edilir.

Alternatif olarak, $\hat{A}$ dual matrisinin determinanı (3.4) eşitliği yardımıyla da hesaplanabilir. Gerçekten, $A_s = [(a_{ij})_s] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ olmak üzere, Tanım 3.3 gereğince A_s matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} \det[A_s] &= (a_{11})_s \left((a_{22})_s (a_{33})_s - (a_{23})_s (a_{32})_s \right) \\ &\quad - (a_{12})_s \left((a_{21})_s (a_{33})_s - (a_{23})_s (a_{31})_s \right) \\ &\quad + (a_{13})_s \left((a_{21})_s (a_{32})_s - (a_{22})_s (a_{31})_s \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. (2.17) eşitliği kullanılarak, determinant fonksiyonunun A_s değişkenine göre gradyanı

$$\nabla \det[A_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{11})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{12})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{13})_s} \\ \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{21})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{22})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{23})_s} \\ \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{31})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{32})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{33})_s} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \nabla \det[A_s]^\top A_d &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{21})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{11})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{31})_s} \\ \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{22})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{12})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{32})_s} \\ \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{23})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{13})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{33})_s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(a_{12})_s(a_{33})_s + (a_{13})_s(a_{32})_s & (a_{22})_s(a_{33})_s - (a_{23})_s(a_{32})_s & (a_{12})_s(a_{23})_s - (a_{13})_s(a_{22})_s \\ (a_{11})_s(a_{33})_s - (a_{13})_s(a_{31})_s & -(a_{21})_s(a_{33})_s + (a_{23})_s(a_{31})_s & -(a_{11})_s(a_{23})_s + (a_{13})_s(a_{21})_s \\ -(a_{11})_s(a_{32})_s + (a_{12})_s(a_{31})_s & (a_{21})_s(a_{32})_s - (a_{22})_s(a_{31})_s & (a_{11})_s(a_{22})_s - (a_{12})_s(a_{21})_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \text{iz}(\nabla \det[A_s]^\top A_d) &= -(a_{12})_s(a_{33})_s + (a_{13})_s(a_{32})_s \\ &\quad - (a_{21})_s(a_{33})_s + (a_{23})_s(a_{31})_s \\ &\quad + (a_{11})_s(a_{22})_s - (a_{12})_s(a_{21})_s \end{aligned}$$

olup burada $A_s = I_3$ olduğundan,

$$\text{iz}(\nabla \det[A_s]^\top A_d) = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak, (3.4) eşitliğinden

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s] + \text{iz}(\nabla \det[A_s]^\top A_d) \varepsilon = 1 + \varepsilon$$

şeklinde aynı sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.1. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$ olsun. $\det[A_s] \neq 0$ ise, $\hat{A}$ dual matrisinin determinanı

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s] (1 + \text{iz}(A_d A_s^{-1}) \varepsilon) \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir [17].

İspat. (3.4) eşitliğini yeniden ele alalım:

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s + A_d \varepsilon] = \det[A_s] + \text{iz}(\nabla \det[A_s]^\top A_d) \varepsilon.$$

$\det[A_s] \neq 0$ olduğundan, A_s matrisi terslenebilirdir ve determinant fonksiyonunun

A_s değişkenine göre gradyanı²

$$\nabla \det[A_s] = \det[A_s](A_s^{-1})^\top \quad (3.7)$$

şeklindedir. Böylece

$$\begin{aligned} \text{iz}(\nabla \det[A_s]^\top A_d) &= \text{iz}\left(\left(\det[A_s](A_s^{-1})^\top\right)^\top A_d\right) \\ &= \text{iz}(\det[A_s] A_s^{-1} A_d) \\ &= \det[A_s] \text{iz}(A_s^{-1} A_d) \\ &= \det[A_s] \text{iz}(A_d A_s^{-1}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir³. Bu ifade (3.4) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlendiğinde

$$\det[\hat{A}] = \det[A_s] (1 + \text{iz}(A_d A_s^{-1}) \varepsilon)$$

eşitliği elde edilir. ■

Tanım 3.5. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$ bir dual matris ve $\hat{\lambda} = \lambda_s + \lambda_d \varepsilon \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $\hat{A}$ dual matrisinin karakteristik polinomu aşağıdaki şekilde tanımlanır [25]:

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = \det[\hat{\lambda} I_n - \hat{A}]. \quad (3.9)$$

Burada $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = 0$ eşitliğini sağlayan $\hat{\lambda} = \lambda_s + \lambda_d \varepsilon \in \mathbb{D}$ dual sayısına $\hat{A}$ dual matrisinin karakteristik kökü denir.

Teorem 3.2 gereğince, $\hat{A}$ dual matrisinin karakteristik polinomu

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = g_{\hat{A}}(\lambda_s) + \left(\sum_{i=1}^n \det[\tilde{A}(i, \hat{\lambda})] \right) \varepsilon \quad (3.10)$$

biçiminde ifade edilir [25]. Burada $g_{\hat{A}}(\lambda_s) := \det[\lambda_s I_n - A_s]$ şeklinde tanımlanır. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\tilde{A}(i, \hat{\lambda})$ matrisi aşağıdaki şekilde verilir:

² $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ terslenebilir bir matris olmak üzere, determinant fonksiyonunun X değişkenine göre gradyanı, (2.17) eşitliği kullanılarak

$$\nabla_X \det[X] = \nabla_X \det[X^\top] = \det[X] X^{-\top}$$

şeklinde ifade edilir [75]. Burada $X^{-\top} = (X^{-1})^\top$ şeklindedir [81].

³ $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ için iz fonksiyonu $\text{iz}(XY) = \text{iz}(YX)$ özelliğini sağlar [74].

$$\tilde{A}(i, \hat{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_s - (a_{11})_s & \cdots & -(a_{1i})_s & \cdots & -(a_{1n})_s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{i1})_d & \cdots & \lambda_d - (a_{ii})_d & \cdots & -(a_{in})_d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1})_s & \cdots & -(a_{ni})_s & \cdots & \lambda_s - (a_{nn})_s \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Böylece

$$\det[\tilde{A}(i, \hat{\lambda})] = \lambda_d \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] + \det[\mathring{A}(i)] \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir. Burada $A_{ii} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ olup, A_s matrisinden i . satır ve i . sütunun silinmesiyle elde edilen alt matristir. Ayrıca $\mathring{A}(i)$ matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathring{A}(i) = \begin{bmatrix} \lambda_s - (a_{11})_s & \cdots & -(a_{1i})_s & \cdots & -(a_{1n})_s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{i1})_d & \cdots & -(a_{ii})_d & \cdots & -(a_{in})_d \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1})_s & \cdots & -(a_{ni})_s & \cdots & \lambda_s - (a_{nn})_s \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

(3.10) eşitliğindeki $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = 0$ koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\det[\lambda_s I_n - A_s] = 0 \quad (3.14)$$

ve

$$\sum_{i=1}^n \det[\tilde{A}(i, \hat{\lambda})] = 0 \quad (3.15)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Böylece (3.12) eşitliğinden

$$\lambda_d \sum_{i=1}^n \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] = - \sum_{i=1}^n \det[\mathring{A}(i)] \quad (3.16)$$

yazılabilir.

$$\Delta_{\hat{A}}(\lambda_s) = \sum_{i=1}^n \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] \quad (3.17)$$

olduğu kabul edilirse, (3.16) eşitliğinden $\lambda_d \Delta_{\hat{A}}(\lambda_s) + \tau(\lambda_s) = 0$ yazılabilir. Burada

$$\tau(\lambda_s) = \sum_{i=1}^n \det[\mathring{A}(i)] \quad (3.18)$$

şeklindedir.

Önerme 3.1. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$ ve $\lambda_s \in \mathbb{R}$, A_s matrisinin bir özdeğeri olsun.

Eğer λ_s , A_s matrisinin cebirsel katlılığı⁴ $k = 1$ olan bir özdeğeri ise, $\hat{\lambda} = \lambda_s + \lambda_d \varepsilon$ sayısı $\hat{A}$ matrisinin bir karakteristik kökü olur. Bu durumda λ_d tek türlü olarak

$$\lambda_d = -\frac{\tau(\lambda_s)}{\Delta_{\hat{A}}(\lambda_s)} \quad (3.19)$$

şeklinde belirlenir. Eğer λ_s , A_s matrisinin cebirsel katlılığı $k \geq 2$ olan bir özdeğeri ise, her $\lambda_d \in \mathbb{R}$ için $\hat{\lambda} = \lambda_s + \lambda_d \varepsilon$ sayısı $\hat{A}$ matrisinin bir karakteristik kökü olur [25].

Tanım 3.6. $\hat{A} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ olsun. $\hat{\lambda} \in \mathbb{D}$ ve $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{D}^n$, $\hat{\mathbf{x}} \neq \hat{0}$ olmak üzere

$$\hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}} \quad (3.20)$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\hat{\lambda}$ değeri $\hat{A}$ dual matrisinin özdeğeri, $\hat{\mathbf{x}}$ ise bu özdeğere karşılık gelen özvektörü olarak adlandırılır [27].

Bir dual sayının bir dual matrisin özdeğeri olabilmesi için gerekli koşullar aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.3. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\hat{\lambda} = \lambda_s + \lambda_d \varepsilon \in \mathbb{D}$ ve $\hat{\mathbf{x}} = x_s + x_d \varepsilon \in \mathbb{D}^n$ olsun. $\hat{\lambda}$ ve $\hat{\mathbf{x}}$ sırasıyla $\hat{A}$ dual matrisinin özdeğeri ve özvektörü ise, λ_s değeri A_s reel matrisinin $x_s \neq 0$ koşulunu sağlayan bir özdeğeri ve

$$A_s x_s = \lambda_s x_s \quad (3.21)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca λ_d ve x_d bileşenleri

$$(A_s - \lambda_s I_n)x_d = (\lambda_d I_n - A_d)x_s \quad (3.22)$$

koşulunu sağlar [37].

İspat. $\hat{A} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$, $\hat{\lambda} = \lambda_s + \lambda_d \varepsilon \in \mathbb{D}$ ve $\hat{\mathbf{x}} = x_s + x_d \varepsilon \in \mathbb{D}^n$ olsun. (3.20) eşitliğinde verilen $\hat{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}}$ ifadesi

$$(A_s + A_d \varepsilon)(x_s + x_d \varepsilon) = (\lambda_s + \lambda_d \varepsilon)(x_s + x_d \varepsilon)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$A_s x_s - \lambda_s x_s + (A_d x_s - \lambda_d x_s + A_s x_d - \lambda_s x_d) \varepsilon = 0$$

⁴ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve λ , A matrisinin bir özdeğeri olsun. A matrisinin karakteristik polinomunda λ kökünün katlılığına, λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir.

ifadesi elde edilir. Böylece (3.21) ve (3.22) eşitlikleri elde edilir. ■

Örnek 3.2. Aşağıdaki dual matrisi ele alalım:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{2 \times 2}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A_s matrisinin karakteristik polinomu

$$g_{\hat{A}}(\lambda_s) = \det[\lambda_s I_2 - A_s] = \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & -1 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 - 2\lambda_s + 1 = (\lambda_s - 1)^2$$

olmak üzere, (3.21) eşitliği gereğince A_s matrisinin özdeğerleri

$$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = 1$$

şeklindedir. Bu özdeğere karşılık gelen bir özvektör

$$x_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan, (3.12) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \det[\tilde{A}(1, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_d & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_d - \lambda_d, \\ \det[\tilde{A}(2, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_d \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_d - \lambda_d - 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.10) eşitliği yardımıyla $\hat{A}$ matrisinin karakteristik polinomu

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = \lambda_s^2 - 2\lambda_s + 1 + (2\lambda_s \lambda_d - 2\lambda_d - 1)\varepsilon$$

olarak bulunur.

$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = 1$ için

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = -\varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon \neq 0$ olduğundan $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) \neq 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\hat{A}$ matrisinin karakteristik kökü yoktur.

Teorem 3.4. $\hat{A} = A_s + A_d\varepsilon \in \mathbb{D}^{n \times n}$ olsun. $\hat{A}$ dual matrisinin özdeğerleri, $\hat{A}$ dual matrisinin karakteristik kökleridir [25].

Bu teoremin karşısı doğru olmak zorunda değildir:

Örnek 3.3. Aşağıdaki dual matrisi ele alalım:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathbb{D}^{3 \times 3}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A_s matrisinin karakteristik polinomu

$$g_{\hat{A}}(\lambda_s) = \det[\lambda_s I_3 - A_s] = \begin{vmatrix} \lambda_s & -1 & -1 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ -1 & -1 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^3 - 3\lambda_s - 2$$

olmak üzere, (3.21) eşitliği gereğince A_s matrisinin özdeğerleri

$$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = -1, \quad (\lambda_s)_3 = 2$$

şeklindedir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Öte yandan, (3.12) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\det[\tilde{A}(1, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_d - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ -1 & -1 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_d - \lambda_s^2 - \lambda_d + 1, \\ \det[\tilde{A}(2, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_s & -1 & -1 \\ 0 & \lambda_d - 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_d - \lambda_s^2 - \lambda_d + 1, \\ \det[\tilde{A}(3, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_s & -1 & -1 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ 0 & 0 & \lambda_d - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_d - \lambda_s^2 - \lambda_d + 1\end{aligned}$$

determinantları elde edilir.

(3.10) eşitliği yardımıyla $\hat{A}$ dual matrisinin karakteristik polinomu

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = \lambda_s^3 - 3\lambda_s - 2 + (3\lambda_s^2 \lambda_d - 3\lambda_s^2 - 3\lambda_d + 3) \varepsilon$$

olarak bulunur.

$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = -1$ için $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = 0$ elde edilir. Önerme 3.1 gereğince, her $\lambda_d \in \mathbb{R}$ için

$$\hat{\lambda} = -1 + \lambda_d \varepsilon$$

değeri $\hat{A}$ dual matrisinin bir karakteristik köküdür.

Benzer şekilde, $(\lambda_s)_3 = 2$ için $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = (9\lambda_d - 9)\varepsilon = 0$ olduğundan $\lambda_d = 1$ elde edilir. Önerme 3.1 gereğince

$$\hat{\lambda} = 2 + \varepsilon$$

değeri $\hat{A}$ dual matrisinin bir karakteristik köküdür.

Buradan

$$(\lambda_s)_1 = -1, \quad (x_s)_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\lambda_d)_1 \in \mathbb{R}, \quad (x_d)_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

için (3.22) eşitliği yardımıyla

$$(\lambda_d)_1 = 1, \quad (x_d)_1 = \begin{bmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(\lambda_s)_2 = -1, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\lambda_d)_2 \in \mathbb{R}, \quad (x_d)_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

için (3.22) eşitliği yardımıyla

$$(\lambda_d)_2 = 1, \quad (x_d)_2 = \begin{bmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$\hat{\lambda}_1 = (\lambda_s)_1 + (\lambda_d)_1 \varepsilon = -1 + \varepsilon, \quad \hat{\lambda}_2 = (\lambda_s)_2 + (\lambda_d)_2 \varepsilon = -1 + \varepsilon$$

değerleri $\hat{A}$ dual matrisinin özdeğerleridir. Ayrıca

$$(\lambda_s)_3 = 2, \quad (x_s)_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\lambda_d)_3 = 1, \quad (x_d)_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

için (3.22) eşitliği yardımıyla

$$(x_d)_3 = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Buradan

$$\hat{\lambda}_3 = (\lambda_s)_3 + (\lambda_d)_3 \varepsilon = 2 + \varepsilon$$

değeri $\hat{A}$ dual matrisinin bir özdeğeridir.

Sonuç olarak, her $\lambda_d \in \mathbb{R}$ için $\hat{\lambda} = -1 + \lambda_d \varepsilon$ bir karakteristik kök olmasına rağmen, yalnızca $\lambda_d = 1$ için özdeğerdir. Bunun yanında, $\hat{\lambda} = 2 + \varepsilon$ karakteristik kökü de $\hat{A}$ matrisinin bir özdeğeridir.

Örnek 3.4. Aşağıdaki dual matrisi ele alalım:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 4\varepsilon \\ 5\varepsilon & 2\varepsilon \end{bmatrix} = A_s + A_d \varepsilon \in \mathbb{D}^{2 \times 2}.$$

Burada A_s sıfır matrisi, A_d ise

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A_s matrisinin karakteristik polinomu

$$g_{\hat{A}}(\lambda_s) = \det[\lambda_s I_2 - A_s] = \begin{vmatrix} \lambda_s & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2$$

olmak üzere, (3.21) eşitliği gereğince $(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = 0$ değeri, A_s matrisinin cebirsel katlılığı 2 olan bir özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca, (3.12) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \det[\tilde{A}(1, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_d - 1 & -4 \\ 0 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_d - \lambda_s, \\ \det[\tilde{A}(2, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_s & 0 \\ -5 & \lambda_d - 2 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_d - 2\lambda_s \end{aligned}$$

determinantları elde edilir.

(3.10) eşitliği yardımıyla $\hat{A}$ dual matrisinin karakteristik polinomu

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = \lambda_s^2 + (2\lambda_s \lambda_d - 3\lambda_s)\varepsilon \quad (3.23)$$

olarak bulunur.

$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = 0$ için $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla Önerme 3.1 gereğince, her $\lambda_d \in \mathbb{R}$ için $\hat{\lambda} = \lambda_d \varepsilon$ değeri $\hat{A}$ dual matrisinin bir karakteristik köküdür.

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

için (3.22) eşitliği yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_d - 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

için (3.22) eşitliği yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ \lambda_d - 2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

elde edilir.

Böylece (3.24) ve (3.25) eşitliklerinden λ_d için herhangi bir çözüm bulunamaz. Şimdi

$$x_s = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.21) eşitliği sağlanır ve (3.22) eşitliği

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\lambda_d - 1) - 4b \\ -5a + b(\lambda_d - 2) \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Böylece

$$(\lambda_d)_1 = -3, \quad (\lambda_d)_2 = 6, \quad (x_s)_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\hat{A}$ dual matrisinin özdeğerleri

$$\hat{\lambda}_1 = (\lambda_s)_1 + (\lambda_d)_1\varepsilon = -3\varepsilon, \quad \hat{\lambda}_2 = (\lambda_s)_2 + (\lambda_d)_2\varepsilon = 6\varepsilon$$

olup, $(x_d)_1, (x_d)_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1 &= (x_s)_1 + (x_d)_1\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_d)_1\varepsilon, \\ \hat{\mathbf{x}}_2 &= (x_s)_2 + (x_d)_2\varepsilon = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + (x_d)_2\varepsilon \end{aligned}$$

şeklindedir.

Ayrıca, (3.23) eşitliğinde verilen karakteristik polinom

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = (\hat{\lambda} + 3\varepsilon)(\hat{\lambda} - 6\varepsilon)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.5. Aşağıdaki dual matrisi ele alalım:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4\varepsilon \\ 5\varepsilon & 2 \end{bmatrix} = A_s + A_d\varepsilon \in \mathbb{D}^{2 \times 2}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde. A_s matrisinin karakteristik polinomu

$$g_{\hat{A}}(\lambda_s) = \det[\lambda_s I_2 - A_s] = \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_s - 2 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 - 3\lambda_s + 2$$

olmak üzere, (3.21) eşitliği gereğince A_s matrisinin özdeğerleri $(\lambda_s)_1 = 1$ ve $(\lambda_s)_2 = 2$ şeklindedir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde.

(3.12) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \det[\tilde{A}(1, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_d & -4 \\ 0 & \lambda_s - 2 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_d - 2\lambda_d, \\ \det[\tilde{A}(2, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 \\ -5 & \lambda_d \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_d - \lambda_d \end{aligned}$$

determinantları elde edilir.

(3.10) eşitliği yardımıyla $\hat{A}$ dual matrisinin karakteristik polinomu

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = \lambda_s^2 - 3\lambda_s + 2 + (2\lambda_s \lambda_d - 3\lambda_d)\varepsilon \quad (3.26)$$

olarak bulunur. $(\lambda_s)_1 = 1$ için

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = -(\lambda_d)_1 \varepsilon$$

olur. Burada $\varepsilon \neq 0$ olduğundan, $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $(\lambda_d)_1 = 0$ olmasıdır.

Benzer şekilde, $(\lambda_s)_2 = 2$ için

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = (\lambda_d)_2 \varepsilon$$

olup $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $(\lambda_d)_2 = 0$ olmasıdır.

Önerme 3.1 gereğince, $\hat{\lambda}_1 = (\lambda_s)_1 + (\lambda_d)_1 \varepsilon = 1$ ve $\hat{\lambda}_2 = (\lambda_s)_2 + (\lambda_d)_2 \varepsilon = 2$ değerlerinin $\hat{A}$ matrisinin karakteristik kökleri olduğu görülür. Bu durumda,

$$(\lambda_s)_1 = 1, \quad (x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\lambda_d)_1 = 0, \quad (x_d)_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

için (3.22) eşitliği yardımıyla

$$(x_d)_1 = \begin{bmatrix} x \\ -5 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(\lambda_s)_2 = 2, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\lambda_d)_2 = 0, \quad (x_d)_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

için (3.22) eşitliği yardımıyla

$$(x_d)_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Teorem 3.3 gereğince $\hat{A}$ matrisinin $\hat{\lambda}_1 = 1$ ve $\hat{\lambda}_2 = 2$ olmak üzere iki özdeğeri vardır. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (x_s)_1 + (x_d)_1 \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 + x\varepsilon \\ -5\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = (x_s)_2 + (x_d)_2 \varepsilon = \begin{bmatrix} 4\varepsilon \\ 1 + y\varepsilon \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Ayrıca, (3.26) eşitliğinde verilen karakteristik polinom

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = (\hat{\lambda} - 1)(\hat{\lambda} - 2)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.6. Aşağıdaki dual matrisi ele alalım:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 + 2\varepsilon & 0 \\ 3\varepsilon & 0 & 2 \end{bmatrix} = A_s + A_d\varepsilon \in \mathbb{D}^{3 \times 3}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A_s matrisinin karakteristik polinomu

$$g_{\hat{A}}(\lambda_s) = \det[\lambda_s I_3 - A_s] = \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s - 2 \end{vmatrix} = \lambda_s^3 - 4\lambda_s^2 + 5\lambda_s - 2$$

olmak üzere, (3.21) eşitliği gereğince A_s matrisinin özdeğerleri

$$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = 1, \quad (\lambda_s)_3 = 2$$

şeklindedir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

(3.12) eşitliği kullanılarak aşağıdaki determinantlar elde edilir:

$$\begin{aligned} \det[\tilde{A}(1, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_d & -1 & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s - 2 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_d - 3\lambda_s \lambda_d + 2\lambda_d, \\ \det[\tilde{A}(2, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_d - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s - 2 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_d - 3\lambda_s \lambda_d + 2\lambda_d - 2\lambda_s^2 + 6\lambda_s - 4, \\ \det[\tilde{A}(3, \hat{\lambda})] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda_d \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_d - 2\lambda_s \lambda_d + \lambda_d. \end{aligned}$$

(3.10) eşitliği yardımıyla $\hat{A}$ matrisinin karakteristik polinomu

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = \lambda_s^3 - 4\lambda_s^2 + 5\lambda_s - 2 + (3\lambda_s^2\lambda_d - 8\lambda_s\lambda_d + 5\lambda_d - 2\lambda_s^2 + 6\lambda_s - 4)\varepsilon$$

olarak bulunur.

$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = 1$ için $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla Önerme 3.1 gereğince her $(\lambda_d)_1 \in \mathbb{R}$ için $\hat{\lambda}_1 = (\lambda_s)_1 + (\lambda_d)_1\varepsilon = 1 + (\lambda_d)_1\varepsilon$, $\hat{A}$ dual matrisinin bir karakteristik köküdür.

Benzer şekilde, $(\lambda_s)_3 = 2$ için $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = (\lambda_d)_2\varepsilon$ elde edilir. Burada $\varepsilon \neq 0$ olduğundan, $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $(\lambda_d)_2 = 0$ olmasıdır. Bu durumda, Önerme 3.1 gereğince $\hat{\lambda}_2 = (\lambda_s)_3 + (\lambda_d)_2\varepsilon = 2$ değeri, $\hat{A}$ dual matrisinin bir karakteristik köküdür.

$$(\lambda_s)_1 = 1, \quad (x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\lambda_d)_1 \in \mathbb{R}, \quad (x_d)_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

için (3.22) eşitliği yardımıyla

$$(\lambda_d)_1 = 0, \quad (x_d)_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -3 \end{bmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$(\lambda_s)_2 = 1, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\lambda_d)_1 \in \mathbb{R}, \quad (x_d)_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

için (3.22) eşitliği yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ (\lambda_d)_1 - 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu denklem sistemi tutarsızdır.

Ayrıca $(\lambda_s)_3 = 2$ için

$$(x_s)_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\lambda_d)_2 = 0, \quad (x_d)_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

alındığında, (3.22) eşitliği yardımıyla

$$(\lambda_d)_2 = 0, \quad (x_d)_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\hat{A}$ matrisinin özdeğerleri $\hat{\lambda}_1 = 1$ ve $\hat{\lambda}_2 = 2$ olup, $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = (x_s)_1 + (x_d)_1 \varepsilon = \begin{bmatrix} 1 + x\varepsilon \\ y\varepsilon \\ -3\varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = (x_s)_3 + (x_d)_3 \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + z\varepsilon \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

HİPERDUAL MATRİSLERDE DETERMİNANT, KARAKTERİSTİK POLİNOM, KARAKTERİSTİK KÖK, ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖR TEORİSİ ÜZERİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

Bu bölümde, hiperdual matrislerde determinant kavramına yönelik yeni bir yaklaşım sunulmaktadır. Öncelikle hiperdual matrislerin determinantı tanımlanacak ve bu tanımdan hareketle karakteristik polinom ile karakteristik kök kavramları ele alınacaktır. Daha sonra karakteristik kökler ile özdeğerler arasındaki ilişki incelenecek; son olarak hiperdual matrislerin özvektörlerinin elde edilebilmesi için gerekli şartlar verilecektir.

4.1 Hiperdual Matrislerin Determinantı

Bu alt bölümde, hiperdual matrislerin determinantına yönelik yeni bir yaklaşım sunulmaktadır.

Teorem 2.9 gereğince, $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar kümesi, üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır. Ayrıca Teorem 2.12 gereğince, $\mathbb{HID}^n$ hiperdual vektörler kümesi, $\mathbb{HID}$ hiperdual sayılar halkası üzerinde bir modül yapısına sahiptir. Bu nedenle, Tanım 3.3 $K = \mathbb{HID}$ alınarak hiperdual matrisler için ifade edilebilir. Buna göre, $A = [a_{ij}] \in \mathbb{HID}^{n \times n}$ hiperdual matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 4.1. $\det : \mathbb{HID}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{HID}$ olmak üzere, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{HID}^{n \times n}$ hiperdual matrisinin determinantı

$$\det[A] = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

şeklinde ifade edilir. Burada toplam $n!$ terimden oluşmakta olup, $(j_1, j_2, \dots, j_n)$

dizisi a_{ij} elemanlarının sütun indislerinin tüm permütasyonları üzerinden alınır. Ayrıca $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$, $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ permütasyonundaki inversion sayısını göstermektedir.

Teorem 4.1. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* = D + D'\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{n \times n}$ hiperdual matrisi verilsin. $A_s = (a_{ij})_s$, $A_{d_1} = (a_{ij})_{d_1}$, $A_{d_2} = (a_{ij})_{d_2}$, $A_{d_3} = (a_{ij})_{d_3} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $D = (d_{ij})$, $D' = (d'_{ij}) \in \mathbb{D}^{n \times n}$ olmak üzere A hiperdual matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} \det[A] = & \det[A_s] + \left(\sum_{i=1}^n \det[D(i)] \right) \varepsilon \\ & + \left(\sum_{i=1}^n \det[A(i)_s] \right) \varepsilon^* + \left(\sum_{i,j=1}^n \det[A(i)(j)] \right) \varepsilon\varepsilon^* \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada $D(i)$ matrisi, A_s matrisinin i . satırı yerine A_{d_1} matrisinin i . satırının yazılmasıyla; $A(i)_s$ matrisi, A_s matrisinin i . satırı yerine A_{d_2} matrisinin i . satırının yazılmasıyla elde edilir. Ayrıca $A(i)(j)$ matrisi, $i = j$ durumunda A_s matrisinin i . satırı yerine A_{d_3} matrisinin i . satırının yazılmasıyla; $i \neq j$ durumunda ise A_s matrisinin i . satırı yerine A_{d_2} matrisinin i . satırının ve j . satırı yerine A_{d_1} matrisinin j . satırının yazılmasıyla elde edilir. Bu matrisler açık olarak aşağıdaki biçimde verilir:

$$\begin{aligned} D(i) = & \begin{bmatrix} (a_{11})_s & (a_{12})_s & \cdots & (a_{1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i-11})_s & (a_{i-12})_s & \cdots & (a_{i-1n})_s \\ (a_{i1})_{d_1} & (a_{i2})_{d_1} & \cdots & (a_{in})_{d_1} \\ (a_{i+11})_s & (a_{i+12})_s & \cdots & (a_{i+1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_s & (a_{n2})_s & \cdots & (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \\ A(i)_s = & \begin{bmatrix} (a_{11})_s & (a_{12})_s & \cdots & (a_{1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i-11})_s & (a_{i-12})_s & \cdots & (a_{i-1n})_s \\ (a_{i1})_{d_2} & (a_{i2})_{d_2} & \cdots & (a_{in})_{d_2} \\ (a_{i+11})_s & (a_{i+12})_s & \cdots & (a_{i+1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_s & (a_{n2})_s & \cdots & (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$i = j$ durumunda

$$A(i)(j) = \begin{bmatrix} (a_{11})_s & (a_{12})_s & \cdots & (a_{1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i-11})_s & (a_{i-12})_s & \cdots & (a_{i-1n})_s \\ (a_{i1})_{d_3} & (a_{i2})_{d_3} & \cdots & (a_{in})_{d_3} \\ (a_{i+11})_s & (a_{i+12})_s & \cdots & (a_{i+1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_s & (a_{n2})_s & \cdots & (a_{nn})_s \end{bmatrix},$$

$i \neq j$ durumunda, genelliği bozmadan $i < j$ kabul edilirse,

$$A(i)(j) = \begin{bmatrix} (a_{11})_s & (a_{12})_s & \cdots & (a_{1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i-11})_s & (a_{i-12})_s & \cdots & (a_{i-1n})_s \\ (a_{i1})_{d_2} & (a_{i2})_{d_2} & \cdots & (a_{in})_{d_2} \\ (a_{i+11})_s & (a_{i+12})_s & \cdots & (a_{i+1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{j-11})_s & (a_{j-12})_s & \cdots & (a_{j-1n})_s \\ (a_{j1})_{d_1} & (a_{j2})_{d_1} & \cdots & (a_{jn})_{d_1} \\ (a_{j+11})_s & (a_{j+12})_s & \cdots & (a_{j+1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_s & (a_{n2})_s & \cdots & (a_{nn})_s \end{bmatrix}.$$

İspat. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{n \times n}$ olsun. (2.29) eşitliği gereğince A matrisi

$$A = D + D'\varepsilon^*$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$D = (d_{ij}) = A_s + A_{d_1}\varepsilon, \quad D' = (d'_{ij}) = A_{d_2} + A_{d_3}\varepsilon$$

birer dual matristir. Teorem 3.2 gereğince A hiperdual matrisinin determinanı

$$\det[A] = \det[D] + \left(\sum_{i=1}^n \det[A(i)] \right) \varepsilon^* \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $A(i)$ matrisi

$$A(i) = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1(i-1)} & d_{1i} & d_{1(i+1)} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{(i-1)1} & \cdots & d_{(i-1)(i-1)} & d_{(i-1)i} & d_{(i-1)(i+1)} & \cdots & d_{(i-1)n} \\ d'_{i1} & \cdots & d'_{i(i-1)} & d'_{ii} & d'_{i(i+1)} & \cdots & d'_{in} \\ d_{(i+1)1} & \cdots & d_{(i+1)(i-1)} & d_{(i+1)i} & d_{(i+1)(i+1)} & \cdots & d_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{n(i-1)} & d_{ni} & d_{n(i+1)} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu matris, D matrisinin i . satırının D' matrisinin i . satırı ile değiştirilmesiyle elde edilir. Ayrıca $A(i) \in \mathbb{D}^{n \times n}$ olduğundan, $A(i)$ matrisi

$$A(i) = A(i)_s + A(i)_d \varepsilon$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre (3.2) eşitliği kullanılarak

$$\det[D] = \det[A_s] + \left(\sum_{i=1}^n \det[D(i)] \right) \varepsilon \quad (4.3)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\det[A(i)] = \det[A(i)_s + A(i)_d \varepsilon] = \det[A(i)_s] + \left(\sum_{j=1}^n \det[A(i)(j)] \right) \varepsilon \quad (4.4)$$

şeklinde yazılır. Burada $\det[D(i)]$ ifadesi (3.3) eşitliği kullanılarak hesaplanır. Ayrıca $A(i)(j)$ matrisi, $A(i)_s$ matrisinin j . satırının $A(i)_d$ matrisinin j . satırı ile değiştirilmesiyle elde edilir.

Son olarak, (4.3) ve (4.4) ifadeleri (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \det[A] &= \det[A_s] + \left(\sum_{i=1}^n \det[D(i)] \right) \varepsilon \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^n \det[A(i)_s] \right) \varepsilon^* + \left(\sum_{i,j=1}^n \det[A(i)(j)] \right) \varepsilon \varepsilon^* \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.1. (4.1) eşitliği

$$\begin{aligned} \det[A] = \det[A_s] + \left(\sum_{i=1}^n \det[A(i)] \right) \varepsilon + \left(\sum_{i=1}^n \det[A^\#(i)] \right) \varepsilon^\star \\ + \left(\sum_{i=1}^n \det[A^{\#\#}(i)] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \det[A^{\#\#\#}(i)(j)] \right) \varepsilon \varepsilon^\star \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $i, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, $A(i)$, $A^\#(i)$ ve $A^{\#\#}(i)$ matrisleri ile $i \neq j$ durumunda $A^{\#\#\#}(i)(j)$ matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A(i) = \begin{bmatrix} (a_{11})_s & (a_{12})_s & \cdots & (a_{1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i-11})_s & (a_{i-12})_s & \cdots & (a_{i-1n})_s \\ (a_{i1})_{d_1} & (a_{i2})_{d_1} & \cdots & (a_{in})_{d_1} \\ (a_{i+11})_s & (a_{i+12})_s & \cdots & (a_{i+1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_s & (a_{n2})_s & \cdots & (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$A^\#(i) = \begin{bmatrix} (a_{11})_s & (a_{12})_s & \cdots & (a_{1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i-11})_s & (a_{i-12})_s & \cdots & (a_{i-1n})_s \\ (a_{i1})_{d_2} & (a_{i2})_{d_2} & \cdots & (a_{in})_{d_2} \\ (a_{i+11})_s & (a_{i+12})_s & \cdots & (a_{i+1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_s & (a_{n2})_s & \cdots & (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$A^{\#\#}(i) = \begin{bmatrix} (a_{11})_s & (a_{12})_s & \cdots & (a_{1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{i-11})_s & (a_{i-12})_s & \cdots & (a_{i-1n})_s \\ (a_{i1})_{d_3} & (a_{i2})_{d_3} & \cdots & (a_{in})_{d_3} \\ (a_{i+11})_s & (a_{i+12})_s & \cdots & (a_{i+1n})_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1})_s & (a_{n2})_s & \cdots & (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$(A^{\#\#\#}(i)(j))_r = \begin{cases} (A_{d_2})_r, & r = i, \\ (A_{d_1})_r, & r = j, \\ (A_s)_r, & r \notin \{i, j\}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Burada $(A^{\#\#\#}(i)(j))_r$, $A^{\#\#\#}(i)(j)$ matrisinin r . satırını göstermektedir.

İspat. (2.8) eşitliği dual matris bağlamında (2.14) eşitliği ile ele alınmıştır [17]. Bu yaklaşımdan hareketle, (2.24) eşitliği $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$ hiperdual matrisi için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*) \\ &= f(A_s) + D_{A_{d_1}}f(A_s)\varepsilon + D_{A_{d_2}}f(A_s)\varepsilon^* \\ &\quad + \left(D_{A_{d_3}}f(A_s) + D_{A_{d_2}}\left(D_{A_{d_1}}f \right)(A_s) \right) \varepsilon\varepsilon^*. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Burada $D_{A_{d_i}}f(A_s)$, f fonksiyonunun A_s noktasında A_{d_i} yönündeki yönlü türevini göstermekte olup (2.15) eşitliğinde tanımlanmıştır. Ayrıca $D_{A_{d_2}}\left(D_{A_{d_1}}f \right)(A_s)$ terimi, $D_{A_{d_1}}f$ fonksiyonunun A_s noktasında A_{d_2} yönündeki yönlü türevini¹ ifade etmektedir. (2.16) ve (4.12) eşitlikleri vasıtasıyla (4.10) eşitliği

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A_s) + \text{iz} \left(\nabla f(A_s)^\top A_{d_1} \right) \varepsilon + \text{iz} \left(\nabla f(A_s)^\top A_{d_2} \right) \varepsilon^* \\ &\quad + \left(\text{iz} \left(\nabla f(A_s)^\top A_{d_3} \right) + \text{iz} \left(\left(\nabla_{A_s} \text{iz} \left(\nabla f(A_s)^\top A_{d_1} \right) \right)^\top A_{d_2} \right) \right) \varepsilon\varepsilon^* \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilir. (4.13) eşitliğinde $f = \det$ alındığında

$$\begin{aligned} \det[A] &= \det[A_s] \\ &\quad + \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} \right) \varepsilon \\ &\quad + \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_2} \right) \varepsilon^* \\ &\quad + \left(\text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{iz} \left(\left(\nabla_{A_s} \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} \right) \right)^\top A_{d_2} \right) \right) \varepsilon\varepsilon^* \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. Buna göre, (2.15) ve (4.11) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} \right) &= \left. \frac{d}{dt} \det[A_s + tA_{d_1}] \right|_{t=0}, \\ \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_2} \right) &= \left. \frac{d}{dt} \det[A_s + tA_{d_2}] \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

¹ $g : \mathbb{R}^{k \times l} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ iki kez diferansiyellenebilir bir matris fonksiyonu ve $X, Y \in \mathbb{R}^{k \times l}$ olmak üzere, g fonksiyonunun X noktasında Y yönündeki ikinci mertebeden yönlü türevi

$$D_Y^2 g(X) = \left. \frac{d^2}{dt^2} g(X + tY) \right|_{t=0} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanır [75]. Özel olarak, $g : \mathbb{R}^{k \times l} \rightarrow \mathbb{R}$ ise (2.16) eşitliği kullanılarak

$$D_Y^2 g(X) = \text{iz} \left(\nabla_X \text{iz} \left(\nabla g(X)^\top Y \right)^\top Y \right) = \text{iz} \left(\nabla_X D_Y g(X)^\top Y \right) \quad (4.12)$$

şeklinde ifade edilir [75].

$$\begin{aligned} \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_3} \right) &= \frac{d}{dt} \det[A_s + tA_{d_3}] \Big|_{t=0} \\ \text{iz} \left(\left(\nabla_{A_s} \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} \right) \right)^\top A_{d_2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \det[A_s + tA_{d_1} + uA_{d_2}] \Big|_{t=u=0} \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla (4.14) eşitliği

$$\begin{aligned} \det[A] &= \det[A_s] + \left(\frac{d}{dt} \det[A_s + tA_{d_1}] \Big|_{t=0} \right) \varepsilon \\ &\quad + \left(\frac{d}{dt} \det[A_s + tA_{d_2}] \Big|_{t=0} \right) \varepsilon^\star \\ &\quad + \left(\frac{d}{dt} \det[A_s + tA_{d_3}] \Big|_{t=0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \det[A_s + tA_{d_1} + uA_{d_2}] \Big|_{t=u=0} \right) \varepsilon \varepsilon^\star \end{aligned} \tag{4.15}$$

formunu alır. A_s , A_{d_1} , A_{d_2} ve A_{d_3} matrislerinin i . satırları sırasıyla $(a_s)_i$, $(a_{d_1})_i$, $(a_{d_2})_i$ ve $(a_{d_3})_i$ olmak üzere

$$A_s + tA_{d_1} = \begin{bmatrix} (a_s)_1 + t(a_{d_1})_1 \\ (a_s)_2 + t(a_{d_1})_2 \\ \vdots \\ (a_s)_n + t(a_{d_1})_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Tanım 3.3 gereğince, determinant fonksiyonu n -lineer olduğundan

$$\begin{aligned} \det[A_s + tA_{d_1}] &= \det((a_s)_1, (a_s)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + t \det((a_{d_1})_1, (a_s)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + t \det((a_s)_1, (a_{d_1})_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + t \det((a_s)_1, (a_s)_2, \dots, (a_{d_1})_n) + \mathcal{O}(t^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{d}{dt} \det[A_s + tA_{d_1}] \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \det[A(i)]$$

olur. Burada $A(i)$ matrisi (4.6) eşitliğinde verilmiştir. Benzer şekilde,

$$\frac{d}{dt} \det[A_s + tA_{d_2}] \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \det[A^\#(i)]$$

ve

$$\left. \frac{d}{dt} \det[A_s + tA_{d_3}] \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \det[A^{\#\#}(i)]$$

elde edilir. Burada $A^{\#}(i)$ ve $A^{\#\#}(i)$ matrisleri sırasıyla (4.7) ve (4.8) eşitliklerinde verilmiştir. Diğer taraftan

$$A_s + tA_{d_1} + uA_{d_2} = \begin{bmatrix} (a_s)_1 + t(a_{d_1})_1 + u(a_{d_2})_1 \\ (a_s)_2 + t(a_{d_1})_2 + u(a_{d_2})_2 \\ \vdots \\ (a_s)_n + t(a_{d_1})_n + u(a_{d_2})_n \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Tanım 3.3 gereğince, determinant fonksiyonu n -lineer olduğundan

$$\begin{aligned} \det[A_s + tA_{d_1} + uA_{d_2}] &= \det((a_s)_1, (a_s)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + t \det((a_{d_1})_1, (a_s)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + t \det((a_s)_1, (a_{d_1})_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + t \det((a_s)_1, (a_s)_2, \dots, (a_{d_1})_n) \\ &\quad + u \det((a_{d_2})_1, (a_s)_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + u \det((a_s)_1, (a_{d_2})_2, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + u \det((a_s)_1, (a_s)_2, \dots, (a_{d_2})_n) \\ &\quad + tu \det((a_{d_2})_1, (a_{d_1})_2, (a_s)_3, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + tu \det((a_{d_1})_1, (a_{d_2})_2, (a_s)_3, \dots, (a_s)_n) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + tu \det((a_s)_1, \dots, (a_{d_2})_{n-1}, (a_{d_1})_n) \\ &\quad + tu \det((a_s)_1, \dots, (a_{d_1})_{n-1}, (a_{d_2})_n) \\ &\quad + \mathcal{O}(t^2, u^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\mathcal{O}(t^2, u^2)$, en az iki satırın A_{d_1} matrisinin satırlarından veya en az iki satırın A_{d_2} matrisinin satırlarından seçildiği terimlerin toplamını ifade etmektedir.

Böylece

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \det[A_s + tA_{d_1} + uA_{d_2}] \Big|_{t=u=0} &= \det((a_{d_2})_1, (a_{d_1})_2, (a_s)_3, \dots, (a_s)_n) \\ &+ \det((a_{d_1})_1, (a_{d_2})_2, (a_s)_3, \dots, (a_s)_n) \\ &+ \dots \\ &+ \det((a_s)_1, \dots, (a_{d_2})_{n-1}, (a_{d_1})_n) \\ &+ \det((a_s)_1, \dots, (a_{d_1})_{n-1}, (a_{d_2})_n) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \det[A_s + tA_{d_1} + uA_{d_2}] \Big|_{t=u=0} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \det[A^{###}(i)(j)]$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A^{###}(i)(j)$ matrisi (4.9) eşitliğinde verilmiştir. Bu ifadeler (4.15) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \det[A] &= \det[A_s] + \left(\sum_{i=1}^n \det[A(i)] \right) \varepsilon + \left(\sum_{i=1}^n \det[A^\#(i)] \right) \varepsilon^\star \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n \det[A^{##}(i)] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \det[A^{###}(i)(j)] \right) \varepsilon \varepsilon^\star \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Örnek 4.1. Aşağıdaki hiperdual matrisi ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon \varepsilon^\star & \varepsilon & \varepsilon^\star \\ \varepsilon & 1 + \varepsilon^\star + \varepsilon \varepsilon^\star & 0 \\ \varepsilon^\star & 0 & 1 + \varepsilon + \varepsilon \varepsilon^\star \end{bmatrix} \in \mathbb{HD}^{3 \times 3}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}, \quad D' = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 1 \\ 0 & 1 + \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1 kullanılarak aşağıdaki determinantlar elde edilir:

$$\det[D(1)] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[A(1)(3)] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[D(2)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[A(2)(1)] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[D(3)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det[A(2)(2)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det[A(1)_s] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[A(2)(3)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det[A(2)_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det[A(3)(1)] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[A(3)_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[A(3)(2)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det[A(1)(1)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det[A(3)(3)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\det[A(1)(2)] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Böylece $\det[A_s] = 1$ olmak üzere, elde edilen determinantlar (4.1) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\det[A] = 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + 4\varepsilon\varepsilon^*$$

bulunur. Bu sonuç, (4.5) eşitliği yardımıyla elde edilen determinant değeriyle aynıdır.

Benzer şekilde, A hiperdual matrisinin determinanti (4.14) eşitliği yardımıyla da hesaplanabilir. Gerçekten, $A_s = [(a_{ij})_s] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ olmak üzere, Tanım 3.3 gereğince A_s matrisinin determinanti

$$\begin{aligned} \det[A_s] &= (a_{11})_s \left((a_{22})_s (a_{33})_s - (a_{23})_s (a_{32})_s \right) \\ &\quad - (a_{12})_s \left((a_{21})_s (a_{33})_s - (a_{23})_s (a_{31})_s \right) \\ &\quad + (a_{13})_s \left((a_{21})_s (a_{32})_s - (a_{22})_s (a_{31})_s \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. (2.17) eşitliği kullanılarak, determinant fonksiyonunun A_s değişkenine göre gradyanı

$$\nabla \det[A_s] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{11})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{12})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{13})_s} \\ \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{21})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{22})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{23})_s} \\ \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{31})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{32})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{33})_s} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{21})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{11})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{31})_s} \\ \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{22})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{12})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{32})_s} \\ \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{23})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{13})_s} & \frac{\partial \det[A_s]}{\partial (a_{33})_s} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(a_{12})_s (a_{33})_s + (a_{13})_s (a_{32})_s & (a_{22})_s (a_{33})_s - (a_{23})_s (a_{32})_s & (a_{12})_s (a_{23})_s - (a_{13})_s (a_{22})_s \\ (a_{11})_s (a_{33})_s - (a_{13})_s (a_{31})_s & -(a_{21})_s (a_{33})_s + (a_{23})_s (a_{31})_s & -(a_{11})_s (a_{23})_s + (a_{13})_s (a_{21})_s \\ -(a_{11})_s (a_{32})_s + (a_{12})_s (a_{31})_s & (a_{21})_s (a_{32})_s - (a_{22})_s (a_{31})_s & (a_{11})_s (a_{22})_s - (a_{12})_s (a_{21})_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} \right) &= -(a_{12})_s (a_{33})_s + (a_{13})_s (a_{32})_s \\ &\quad - (a_{21})_s (a_{33})_s + (a_{23})_s (a_{31})_s \\ &\quad + (a_{11})_s (a_{22})_s - (a_{12})_s (a_{21})_s \end{aligned} \quad (4.16)$$

olup burada $A_s = I_3$ olduğundan,

$$\text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} \right) = 1$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_2} \right) = 1$$

ve

$$\text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_3} \right) = 3$$

elde edilir.

(2.17) eşitliği kullanılarak, (4.16) eşitliğinin A_s değişkenine göre gradyanı

$$\nabla_{A_s} \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} \right) = \begin{bmatrix} (a_{22})_s & -(a_{33})_s - (a_{21})_s & (a_{32})_s \\ -(a_{33})_s - (a_{12})_s & (a_{11})_s & (a_{31})_s \\ (a_{23})_s & (a_{13})_s & -(a_{21})_s - (a_{12})_s \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. $A_s = I_3$ değeri yerine yazıldığında

$$\nabla_{A_s} \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\text{iz} \left(\left(\nabla_{A_s} \text{iz} \left(\nabla \det[A_s]^\top A_{d_1} \right) \right)^\top A_{d_2} \right) = 1$$

olur. Sonuç olarak, (4.14) eşitliğinden

$$\det[A] = 1 + \varepsilon + \varepsilon^\star + 4\varepsilon\varepsilon^\star$$

şeklinde aynı sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^\star + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^\star \in \mathbb{H}^{n \times n}$ olsun. $\det[A_s] \neq 0$ ise, A hiperdual matrisinin determinanı

$$\begin{aligned} \det[A] &= \det[A_s] \left(1 + \text{iz} \left(A_{d_1} A_s^{-1} \right) \varepsilon + \text{iz} \left(A_{d_2} A_s^{-1} \right) \varepsilon^\star \right. \\ &\quad + \left(\text{iz} \left(A_{d_3} A_s^{-1} \right) + \text{iz} \left(A_{d_1} A_s^{-1} \right) \text{iz} \left(A_{d_2} A_s^{-1} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \text{iz} \left(A_{d_1} A_s^{-1} A_{d_2} A_s^{-1} \right) \right) \varepsilon\varepsilon^\star \right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir².

² $A = D + D'\varepsilon^\star \in \mathbb{H}^{n \times n}$ hiperdual matrisinin determinanı, D dual matrisinin terslenebilir olması durumunda

$$\det[A] = \det[D] \left(1 + \text{iz} \left(D^{-1} D' \right) \varepsilon^\star \right)$$

eşitliği yardımıyla da hesaplanabilir [66].

4.2 Hiperdual Matrislerin Karakteristik Polinomu

Bu alt bölümde, hiperdual matrisler için karakteristik polinom ve karakteristik kök kavramları tanıtılmaktadır.

Tanım 4.2.

$$\begin{aligned} A &= A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* = D + D'\varepsilon^* \in \mathbb{HD}^{n \times n}, \\ \Lambda &= \lambda_s + \lambda_{d_1}\varepsilon + \lambda_{d_2}\varepsilon^* + \lambda_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* = \lambda + \lambda'\varepsilon^* \in \mathbb{HD} \end{aligned}$$

olmak üzere, A hiperdual matrisinin karakteristik polinomu

$$f_A(\Lambda) = \det[\Lambda I_n - A] \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f_A(\Lambda) = 0$ koşulunu sağlayan $\Lambda \in \mathbb{HD}$ hiperdual sayısına A hiperdual matrisinin karakteristik kökü denir.

Teorem 4.2. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* = D + D'\varepsilon^* \in \mathbb{HD}^{n \times n}$ olsun. $\Lambda = \lambda_s + \lambda_{d_1}\varepsilon + \lambda_{d_2}\varepsilon^* + \lambda_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* = \lambda + \lambda'\varepsilon^* \in \mathbb{HD}$ olmak üzere A hiperdual matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} f_A(\Lambda) &= \det[\lambda_s I_n - A_s] + \left(\sum_{i=1}^n \det[\tilde{D}(i, \lambda)] \right) \varepsilon \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^n \det[\tilde{A}(i, \Lambda)_s] \right) \varepsilon^* + \left(\sum_{i,j=1}^n \det[\tilde{A}(i, \Lambda)(j)] \right) \varepsilon\varepsilon^* \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklindedir. Karakteristik polinom ifadesinde yer alan matrisler, $i, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, aşağıda verilmiştir. Ayrıca $\tilde{A}(i, \Lambda)(j)$ matrisi, $i = j$ ve $i \neq j$ durumlarına göre ayrı biçimde tanımlanır:

$$\tilde{D}(i, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_s - (a_{11})_s & \cdots & -(a_{1i})_s & \cdots & -(a_{1n})_s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{i1})_{d_1} & \cdots & \lambda_{d_1} - (a_{ii})_{d_1} & \cdots & -(a_{in})_{d_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1})_s & \cdots & -(a_{ni})_s & \cdots & \lambda_s - (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

$$\tilde{A}(i, \Lambda)_s = \begin{bmatrix} \lambda_s - (a_{11})_s & \cdots & -(a_{1i})_s & \cdots & -(a_{1n})_s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{i1})_{d_2} & \cdots & \lambda_{d_2} - (a_{ii})_{d_2} & \cdots & -(a_{in})_{d_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1})_s & \cdots & -(a_{ni})_s & \cdots & \lambda_s - (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$i = j$ durumunda

$$\tilde{A}(i, \Lambda)(j) = \begin{bmatrix} \lambda_s - (a_{11})_s & \cdots & -(a_{1i})_s & \cdots & -(a_{1n})_s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{i1})_{d_3} & \cdots & \lambda_{d_3} - (a_{ii})_{d_3} & \cdots & -(a_{in})_{d_3} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1})_s & \cdots & -(a_{ni})_s & \cdots & \lambda_s - (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$i \neq j$ durumunda, genelliği bozmadan $i < j$ kabul edilirse,

$$\tilde{A}(i, \Lambda)(j) = \begin{bmatrix} \lambda_s - (a_{11})_s & \cdots & -(a_{1i})_s & \cdots & -(a_{1j})_s & \cdots & -(a_{1n})_s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{i1})_{d_2} & \cdots & \lambda_{d_2} - (a_{ii})_{d_2} & \cdots & -(a_{ij})_{d_2} & \cdots & -(a_{in})_{d_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{j1})_{d_1} & \cdots & -(a_{ji})_{d_1} & \cdots & \lambda_{d_1} - (a_{jj})_{d_1} & \cdots & -(a_{jn})_{d_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1})_s & \cdots & -(a_{ni})_s & \cdots & -(a_{nj})_s & \cdots & \lambda_s - (a_{nn})_s \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

şeklindedir.

İspat. $A = D + D'\varepsilon^* \in \mathbb{H}^{n \times n}$ hiperdual matrisi ve $\Lambda \in \mathbb{H}$ olsun. Burada

$$D = (d_{ij}) = A_s + A_{d_1}\varepsilon, \quad D' = (d'_{ij}) = A_{d_2} + A_{d_3}\varepsilon$$

şeklindedir. (3.2) ve (3.10) eşitliklerinden A matrisinin karakteristik polinomu

$$f_A(\Lambda) = \det[\lambda I_n - D] + \left(\sum_{i=1}^n \det[\tilde{A}(i, \Lambda)] \right) \varepsilon^*$$

şeklinde yazılabilir. Burada, her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\tilde{A}(i, \Lambda)$ matrisi

$$\tilde{A}(i, \Lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - d_{11} & \cdots & -d_{1i} & \cdots & -d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d'_{i1} & \cdots & \lambda' - d'_{ii} & \cdots & -d'_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{n1} & \cdots & -d_{ni} & \cdots & \lambda - d_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

biçimindedir. (3.12) eşitliğinden

$$\det[\tilde{D}(i, \lambda)] = \lambda_{d_1} \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] + \det[\mathring{A}(i)]$$

olduğu açıktır. Ayrıca, Teorem 4.1 gereğince, $\tilde{A}(i, \Lambda) \in \mathbb{D}^{n \times n}$ için

$$\tilde{A}(i, \Lambda) = \tilde{A}(i, \Lambda)_s + \tilde{A}(i, \Lambda)_d \varepsilon$$

olup (4.18) eşitliği elde edilir. Burada $\tilde{A}(i, \Lambda)(j)$ matrisi, $\tilde{A}(i, \Lambda)_s$ matrisinin j . satırının $\tilde{A}(i, \Lambda)_d$ matrisinin j . satırı ile değiştirilmesiyle elde edilen matristir. ■

Teorem 4.3. $A = A_s + A_{d_1} \varepsilon + A_{d_2} \varepsilon^* + A_{d_3} \varepsilon \varepsilon^* = D + D' \varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{n \times n}$ hiperdual matris olsun. Eğer $\lambda_s \in \mathbb{R}$, A_s reel matrisinin cebirsel katlılığı $k = 1$ olan bir özdeğeri ise, $\Lambda = \lambda_s + \lambda_{d_1} \varepsilon + \lambda_{d_2} \varepsilon^* + \lambda_{d_3} \varepsilon \varepsilon^*$ sayısındaki $\lambda_{d_1}, \lambda_{d_2}, \lambda_{d_3}$ katsayıları

$$\begin{aligned} \lambda_{d_1} &= -\frac{\tau(\lambda_s)}{\Delta_A(\lambda_s)}, \\ \lambda_{d_2} &= -\frac{\tau'(\lambda_s)}{\Delta_A(\lambda_s)}, \\ \lambda_{d_3} &= -\frac{\tau''(\lambda_s) + \lambda_{d_1} \Gamma' + \Gamma}{\Delta_A(\lambda_s)} \end{aligned}$$

şeklinde tek türlü belirlenir. Bu durumda $\Lambda \in \mathbb{H}\mathbb{D}$, A hiperdual matrisinin karakteristik köküdür. Eğer $\lambda_s \in \mathbb{R}$, A_s reel matrisinin cebirsel katlılığı $k \geq 2$ olan bir özdeğeri ise, $\Lambda = \lambda_s + \lambda_{d_1} \varepsilon + \lambda_{d_2} \varepsilon^* + \lambda_{d_3} \varepsilon \varepsilon^*$ sayısı A matrisinin karakteristik köküdür.

İspat. (4.18) eşitliğinde yer alan $\det[\tilde{D}(i, \lambda)]$, $\det[\tilde{A}(i, \Lambda)_s]$ ve $\det[\tilde{A}(i, \Lambda)(j)]$ determinantları, (3.12) eşitliği kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\det[\tilde{D}(i, \lambda)] = \lambda_{d_1} \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] + \det[\mathring{A}(i)], \quad (4.24)$$

$$\det[\tilde{A}(i, \Lambda)_s] = \lambda_{d_2} \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] + \det[\mathring{A}^\#(i)], \quad (4.25)$$

$$\det[\tilde{A}(i, \Lambda)(j)] = \begin{cases} \lambda_{d_3} \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] + \det[\mathring{A}^{\#\#}(i)], & i = j, \\ \lambda_{d_1} \det[(\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j))_{jj}] + \det[\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j)], & i \neq j. \end{cases} \quad (4.26)$$

Burada A_{ii} , A_s matrisinden i . satır ve i . sütunun silinmesiyle elde edilen alt matristir. Ayrıca $\mathring{A}(i)$, $\mathring{A}^\#(i)$ ve $\mathring{A}^{\#\#}(i)$ matrisleri (3.13) eşitliği kullanılarak

sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}\mathring{A}(i) &= \begin{bmatrix} \lambda_s - (a_{11})_s & \cdots & -(a_{1i})_s & \cdots & -(a_{1n})_s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{i1})_{d_1} & \cdots & -(a_{ii})_{d_1} & \cdots & -(a_{in})_{d_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1})_s & \cdots & -(a_{ni})_s & \cdots & \lambda_s - (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \\ \mathring{A}^\#(i) &= \begin{bmatrix} \lambda_s - (a_{11})_s & \cdots & -(a_{1i})_s & \cdots & -(a_{1n})_s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{i1})_{d_2} & \cdots & -(a_{ii})_{d_2} & \cdots & -(a_{in})_{d_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1})_s & \cdots & -(a_{ni})_s & \cdots & \lambda_s - (a_{nn})_s \end{bmatrix}, \\ \mathring{A}^{\#\#}(i) &= \begin{bmatrix} \lambda_s - (a_{11})_s & \cdots & -(a_{1i})_s & \cdots & -(a_{1n})_s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{i1})_{d_3} & \cdots & -(a_{ii})_{d_3} & \cdots & -(a_{in})_{d_3} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_{n1})_s & \cdots & -(a_{ni})_s & \cdots & \lambda_s - (a_{nn})_s \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ayrıca $\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j)$ matrisinin r . satırı $(\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j))_r$ ile gösterilmek üzere,

$$(\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j))_r = \begin{cases} (\lambda_{d_2} I_n - A_{d_2})_r, & r = i, \\ -(A_{d_1})_r, & r = j, \\ (\lambda_s I_n - A_s)_r, & r \notin \{i, j\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j))_{jj}$ matrisi, $\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j)$ matrisinden j . satır ve j . sütunun silinmesiyle elde edilen alt matrisi göstermektedir.

(4.18) eşitliğinde $f_A(\Lambda) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{cases} \det[\lambda_s I_n - A_s] = 0, \\ \sum_{i=1}^n \det[\tilde{D}(i, \lambda)] = 0, \\ \sum_{i=1}^n \det[\tilde{A}(i, \Lambda)_s] = 0, \\ \sum_{i,j=1}^n \det[\tilde{A}(i, \Lambda)(j)] = 0 \end{cases}$$

olmasıdır. Buna göre (4.24), (4.25) ve (4.26) eşitliklerinden

$$\left\{ \begin{array}{l} \det[\lambda_s I_n - A_s] = 0, \\ \lambda_{d_1} \sum_{i=1}^n \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] + \sum_{i=1}^n \det[\mathring{A}(i)] = 0, \\ \lambda_{d_2} \sum_{i=1}^n \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] + \sum_{i=1}^n \det[\mathring{A}^\#(i)] = 0, \\ \lambda_{d_3} \sum_{i=1}^n \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s] + \sum_{i=1}^n \det[\mathring{A}^{\#\#}(i)] \\ + \lambda_{d_1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \det[(\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j))_{jj}] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \det[\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j)] = 0 \end{array} \right. \quad (4.27)$$

elde edilir. Gösterimi sadeleştirmek amacıyla

$$g_A(\lambda_s) = \det[\lambda_s I_n - A_s], \quad \Delta_A(\lambda_s) = \sum_{i=1}^n \det[\lambda_s I_{n-1} - (A_{ii})_s]$$

şeklinde alınırsa (4.27) ile verilen eşitlikler aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_A(\lambda_s) = 0, \\ \lambda_{d_1} \Delta_A(\lambda_s) + \tau(\lambda_s) = 0, \\ \lambda_{d_2} \Delta_A(\lambda_s) + \tau'(\lambda_s) = 0, \\ \lambda_{d_3} \Delta_A(\lambda_s) + \tau''(\lambda_s) + \lambda_{d_1} \Gamma' + \Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Burada

$$\begin{aligned} \tau(\lambda_s) &= \sum_{i=1}^n \det[\mathring{A}(i)], \\ \tau'(\lambda_s) &= \sum_{i=1}^n \det[\mathring{A}^\#(i)], \\ \tau''(\lambda_s) &= \sum_{i=1}^n \det[\mathring{A}^{\#\#}(i)], \\ \Gamma &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \det[\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j)], \\ \Gamma' &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \det[(\mathring{A}^{\#\#\#}(i)(j))_{jj}] \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.3 Hiperdual Matrislerin Özdeğer ve Özvektörleri

Bu alt bölümde, hiperdual matrislerin özdeğer ve özvektör yapısı incelenecektir. Bu amaçla, hiperdual matrisler için verilen karakteristik polinom tanımından hareketle karakteristik kökler ele alınacak ve bu köklerin hangi koşullar altında özdeğer olduğu belirlenecektir. Ayrıca, karşılık gelen özvektörlerin elde edilmesine ilişkin temel koşullar ortaya konulacaktır.

Tanım 4.3. $A \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{n \times n}$ ve $X \in \mathbb{H}\mathbb{D}^n$, $X \neq 0$ olsun.

$$AX = \Lambda X \quad (4.29)$$

eşitliğini sağlayan $\Lambda \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ değerine A matrisinin özdeğeri, X vektörüne ise bu özdeğere karşılık gelen özvektör denir³.

Teorem 4.4. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{n \times n}$ hiperdual matrisi verilsin. $\lambda_s, A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör $x_s \neq 0$ ise

$$A_s x_s = \lambda_s x_s \quad (4.30)$$

eşitliği⁴ sağlanır. Bu durumda $\Lambda = \lambda_s + \lambda_{d_1}\varepsilon + \lambda_{d_2}\varepsilon^* + \lambda_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ değerinin A hiperdual matrisinin bir özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörün $X = x_s + x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^n$ olması için aşağıdaki eşitlikler sağlanmalıdır:

$$\begin{cases} (A_s - \lambda_s I_n)x_{d_1} = (\lambda_{d_1} I_n - A_{d_1})x_s, \\ (A_s - \lambda_s I_n)x_{d_2} = (\lambda_{d_2} I_n - A_{d_2})x_s, \\ (A_s - \lambda_s I_n)x_{d_3} = (\lambda_{d_3} I_n - A_{d_3})x_s + (\lambda_{d_2} I_n - A_{d_2})x_{d_1} + (\lambda_{d_1} I_n - A_{d_1})x_{d_2}. \end{cases} \quad (4.31)$$

İspat.

$$A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{n \times n},$$

$$\Lambda = \lambda_s + \lambda_{d_1}\varepsilon + \lambda_{d_2}\varepsilon^* + \lambda_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D},$$

$$X = x_s + x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^n$$

olsun. Bu ifadeler (4.29) eşitliğinde verilen $AX = \Lambda X$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*) (x_s + x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*) \\ = (\lambda_s + \lambda_{d_1}\varepsilon + \lambda_{d_2}\varepsilon^* + \lambda_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*) (x_s + x_{d_1}\varepsilon + x_{d_2}\varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*) \end{aligned}$$

³Lineer cebirdeki klasik özdeğer ve özvektör tanımının hiperdual matrisler için karşılığı [66] kaynağında verilmiştir.

⁴ A_s reel matrisi, hem dual matrisin hem de hiperdual matrisin standart kısmını temsil ettiğinden, (3.21) ve (4.30) aynı eşitliği vermektedir.

elde edilir. (2.19) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
& A_s x_s - \lambda_s x_s \\
& + (A_{d_1} x_s - \lambda_{d_1} x_s + A_s x_{d_1} - \lambda_s x_{d_1}) \varepsilon \\
& + (A_{d_2} x_s - \lambda_{d_2} x_s + A_s x_{d_2} - \lambda_s x_{d_2}) \varepsilon^* \\
& + (A_{d_3} x_s - \lambda_{d_3} x_s + A_{d_2} x_{d_1} - \lambda_{d_2} x_{d_1} + A_{d_1} x_{d_2} - \lambda_{d_1} x_{d_2} + A_s x_{d_3} - \lambda_s x_{d_3}) \varepsilon \varepsilon^* \\
& = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.30) ve (4.31) eşitlikleri elde edilmiş olur. ■

Teorem 4.5. $A = A_s + A_{d_1} \varepsilon + A_{d_2} \varepsilon^* + A_{d_3} \varepsilon \varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{n \times n}$ hiperdual matrisi verilsin. A hiperdual matrisinin özdeğerleri, A hiperdual matrisinin karakteristik kökleridir.

Bu teoremin karşısı doğru olmak zorunda değildir:

Örnek 4.2. Aşağıdaki hiperdual matrisi ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon^* & \varepsilon + \varepsilon \varepsilon^* \\ \varepsilon + \varepsilon \varepsilon^* & 1 + \varepsilon^* \end{bmatrix} \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{2 \times 2}.$$

Burada

$$\begin{aligned}
A_s &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_{d_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & A_{d_2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_{d_3} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}, & D' &= \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

(4.30) eşitliğinden, A_s matrisinin özdeğeri $(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = 1$ olarak elde edilir. Bu özdeğere karşılık gelen özvektörler ise

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.24), (4.25) ve (4.26) eşitliklerinden aşağıdaki determinantlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
\det[\tilde{D}(1, \lambda)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} & -1 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} - \lambda_{d_1}, \\
\det[\tilde{D}(2, \lambda)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_1} \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} - \lambda_{d_1}, \\
\det[\tilde{A}(1, \Lambda)_s] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_2} - \lambda_{d_2} - \lambda_s + 1, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)_s] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{d_2} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_2} - \lambda_{d_2} - \lambda_s + 1, \\
\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(1)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_3} & -1 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_3} - \lambda_{d_3}, \\
\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(2)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} - 1 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_1} \end{vmatrix} = \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_{d_1}, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(1)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} & -1 \\ 0 & \lambda_{d_2} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_{d_1}, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(2)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_3} \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_3} - \lambda_{d_3}.
\end{aligned}$$

(4.18) eşitliğinden A hiperdual matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}
f_A(\Lambda) &= \lambda_s^2 - 2\lambda_s + 1 + (2\lambda_s \lambda_{d_1} - 2\lambda_{d_1})\varepsilon \\
&\quad + (2\lambda_s \lambda_{d_2} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_2} + 2)\varepsilon^* \\
&\quad + (2\lambda_s \lambda_{d_3} - 2\lambda_{d_3} + 2\lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_1})\varepsilon\varepsilon^*
\end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklinde elde edilir.

$\lambda_s = 1$ için

$$f_A(\Lambda) = (2\lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_1})\varepsilon\varepsilon^*$$

elde edilir. Dolayısıyla $f_A(\Lambda) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_{d_1}(\lambda_{d_2} - 1) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Eğer $\lambda_{d_1} \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_{d_2} = 1$ ise Teorem 4.3 gereğince

$$\Lambda = 1 + \lambda_{d_1}\varepsilon + \varepsilon^* + \lambda_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$$

değeri A matrisinin karakteristik köküdür.

$$x_s = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad x_{d_1} = \begin{bmatrix} x_{d_1,1} \\ x_{d_1,2} \end{bmatrix}, \quad x_{d_2} = \begin{bmatrix} x_{d_2,1} \\ x_{d_2,2} \end{bmatrix}, \quad x_{d_3} = \begin{bmatrix} x_{d_3,1} \\ x_{d_3,2} \end{bmatrix}$$

alınsın. Teorem 4.4 gereğince

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\lambda_{d_1} - b \\ -a + b\lambda_{d_1} \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten aşağıdaki iki durum elde edilir:

(i) $a = b$ olması durumunda

$$x_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

seçilebilir. Teorem 4.4 gereğince

$$\lambda_{d_1} = 1, \quad \lambda_{d_3} = 1, \quad x_{d_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\Lambda = 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^*$$

değeri A matrisinin bir özdeğeridir. Bu özdeğere karşılık gelen özvektör ise

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_{d_1}\varepsilon + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$$

şeklindedir.

(ii) $a = -b$ olması durumunda

$$x_s = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

seçilebilir. Teorem 4.4 gereğince

$$\lambda_{d_1} = -1, \quad \lambda_{d_3} = -1, \quad x_{d_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\Lambda = 1 - \varepsilon + \varepsilon^* - \varepsilon\varepsilon^*$$

değeri A matrisinin bir özdeğeridir. Bu özdeğere karşılık gelen özvektör ise

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_{d_1}\varepsilon + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$$

şeklindedir.

Her iki durumda da $x_{d_1}, x_{d_3} \in \mathbb{R}^2$ keyfi vektörlerdir.

Sonuç olarak, A matrisinin her $\lambda_{d_1}, \lambda_{d_3} \in \mathbb{R}$ için $\Lambda = 1 + \lambda_{d_1}\varepsilon + \varepsilon^* + \lambda_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$ biçiminde sonsuz sayıda karakteristik kökü olmasına rağmen, A matrisinin yalnızca

$$\Lambda = 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \quad \text{ve} \quad \Lambda = 1 - \varepsilon + \varepsilon^* - \varepsilon\varepsilon^*$$

şeklinde iki farklı özdeğeri vardır.

Ayrıca, (4.32) eşitliğinde verilen A matrisinin karakteristik polinomu

$$f_A(\Lambda) = (\Lambda - 1 - \varepsilon - \varepsilon^* - \varepsilon\varepsilon^*)(\Lambda - 1 + \varepsilon - \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^*)$$

şeklinde yazılabilir.

Dikkat edilirse, Örnek 4.2 için $\lambda_{d_1} = 0$ ve $\lambda_{d_2} \in \mathbb{R}$ alındığında $\lambda_{d_1}(\lambda_{d_2} - 1) = 0$ eşitliği sağlanır; ancak bu durumda özdeğer elde edilememektedir.

Örnek 4.3. Aşağıdaki hiperdual matrisi ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon^* & 1 + \varepsilon^* \\ \varepsilon + \varepsilon\varepsilon^* & 1 + \varepsilon^* \end{bmatrix} \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{2 \times 2}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad D' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.30) eşitliğinden, A_s matrisinin özdeğeri $\lambda_s = 1$ olarak elde edilir. Bu özdeğere karşılık gelen özvektör ise

$$x_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.24), (4.25) ve (4.26) eşitliklerinden aşağıdaki determinantlar hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\det[\tilde{D}(1, \lambda)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} - \lambda_{d_1}, \\
\det[\tilde{D}(2, \lambda)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_{d_1} \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} - \lambda_{d_1} - 1, \\
\det[\tilde{A}(1, \Lambda)_s] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} - 1 & -1 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_2} - \lambda_s - \lambda_{d_2} + 1, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)_s] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & -1 \\ 0 & \lambda_{d_2} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_2} - \lambda_s - \lambda_{d_2} + 1, \\
\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(1)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_3} & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_3} - \lambda_{d_3}, \\
\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(2)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_{d_1} \end{vmatrix} = \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_{d_1} - 1, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(1)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} & 0 \\ 0 & \lambda_{d_2} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_{d_1}, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(2)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_{d_3} \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_3} - \lambda_{d_3} - 1.
\end{aligned}$$

(4.18) eşitliğinden A hiperdual matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}
f_A(\Lambda) &= \lambda_s^2 - 2\lambda_s + 1 + (2\lambda_s \lambda_{d_1} - 2\lambda_{d_1} - 1)\varepsilon \\
&\quad + (2\lambda_s \lambda_{d_2} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_2} + 2)\varepsilon^* \\
&\quad + (2\lambda_s \lambda_{d_3} - 2\lambda_{d_3} + 2\lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_1} - 2)\varepsilon\varepsilon^*
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$\lambda_s = 1$ için

$$f_A(\Lambda) = -\varepsilon + (2\lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_1} - 2)\varepsilon\varepsilon^* \neq 0$$

elde edilir. Bu nedenle A matrisinin karakteristik kökü yoktur. Dolayısıyla Teorem 4.5 gereğince A hiperdual matrisinin özdeğeri de yoktur.

Örnek 4.4. Aşağıdaki hiperdual matrisi ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} 3 - 2\varepsilon & 1 + 2\varepsilon - 2\varepsilon^* - \varepsilon\varepsilon^* \\ 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* & 3 + 2\varepsilon \end{bmatrix} \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{2 \times 2}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 - 2\varepsilon & 1 + 2\varepsilon \\ 1 + 2\varepsilon & 3 + 2\varepsilon \end{bmatrix}, \quad D' = \begin{bmatrix} 0 & -2 - \varepsilon \\ 2 + \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.30) eşitliğinden, A_s matrisinin özdeğerleri $(\lambda_s)_1 = 2$ ve $(\lambda_s)_2 = 4$ olarak elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise sırasıyla

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.24), (4.25) ve (4.26) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki determinantlar elde edilir:

$$\det[\tilde{D}(1, \lambda)] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} + 2 & -2 \\ -1 & \lambda_s - 3 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} - 3\lambda_{d_1} + 2\lambda_s - 6 - 2,$$

$$\det[\tilde{D}(2, \lambda)] = \begin{vmatrix} \lambda_s - 3 & -1 \\ -2 & \lambda_{d_1} - 2 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} - 2\lambda_s - 3\lambda_{d_1} + 6 - 2$$

$$\det[\tilde{A}(1, \Lambda)_s] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} & 2 \\ -1 & \lambda_s - 3 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_2} - 3\lambda_{d_2} + 2,$$

$$\det[\tilde{A}(2, \Lambda)_s] = \begin{vmatrix} \lambda_s - 3 & -1 \\ -2 & \lambda_{d_2} \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_2} - 3\lambda_{d_2} - 2,$$

$$\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(1)] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_3} & 1 \\ -1 & \lambda_s - 3 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_3} - 3\lambda_{d_3} + 1,$$

$$\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(2)] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} & 2 \\ -2 & \lambda_{d_1} - 2 \end{vmatrix} = \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_2} + 4,$$

$$\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(1)] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} + 2 & -2 \\ -2 & \lambda_{d_2} \end{vmatrix} = \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} + 2\lambda_{d_2} - 4,$$

$$\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(2)] = \begin{vmatrix} \lambda_s - 3 & -1 \\ -1 & \lambda_{d_3} \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_3} - 3\lambda_{d_3} - 1.$$

(4.18) eşitliğinden A matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} f_A(\Lambda) = & \lambda_s^2 - 6\lambda_s + 8 + (2\lambda_s\lambda_{d_1} - 6\lambda_{d_1} - 4)\varepsilon \\ & + (2\lambda_s\lambda_{d_2} - 6\lambda_{d_2})\varepsilon^* \\ & + (2\lambda_s\lambda_{d_3} + 2\lambda_{d_1}\lambda_{d_2} - 6\lambda_{d_3})\varepsilon\varepsilon^* \end{aligned} \quad (4.33)$$

olarak elde edilir.

$(\lambda_s)_1 = 2$ için

$$f_A(\Lambda) = (-2\lambda_{d_1} - 4)\varepsilon + (-2\lambda_{d_2})\varepsilon^* + (2\lambda_{d_1}\lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_3})\varepsilon\varepsilon^*$$

elde edilir. Burada $f_A(\Lambda) = 0$ olması için gerek ve yeter ve koşul

$$(\lambda_{d_1})_1 = -2, \quad (\lambda_{d_2})_1 = 0, \quad (\lambda_{d_3})_1 = 0$$

olmasıdır.

Benzer şekilde, $(\lambda_s)_2 = 4$ için

$$f_A(\Lambda) = (2\lambda_{d_1} - 4)\varepsilon + (2\lambda_{d_2})\varepsilon^* + (2\lambda_{d_1}\lambda_{d_2} + 2\lambda_{d_3})\varepsilon\varepsilon^*$$

olup $f_A(\Lambda) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$(\lambda_{d_1})_2 = 2, \quad (\lambda_{d_2})_2 = 0, \quad (\lambda_{d_3})_2 = 0$$

olmasıdır.

Dolayısıyla Teorem 4.2 gereğince

$$\Lambda_1 = 2 - 2\varepsilon, \quad \Lambda_2 = 4 + 2\varepsilon$$

değerleri A matrisinin karakteristik kökleridir. Bu değerler Teorem 4.3 kullanılarak da elde edilebilir.

Teorem 4.4 gereğince A matrisinin özdeğerleri

$$\Lambda_1 = 2 - 2\varepsilon, \quad \Lambda_2 = 4 + 2\varepsilon$$

olarak elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise $b, d, f \in \mathbb{R}$ için

sırasıyla

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 + (-2 - b)\varepsilon + (2 - d)\varepsilon^* + (2b - 2d - f + 1)\varepsilon\varepsilon^* \\ 1 + b\varepsilon + d\varepsilon^* + f\varepsilon\varepsilon^* \end{bmatrix}$$

ve

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 + (-2 + b)\varepsilon + (-2 + d)\varepsilon^* + (-2b - 2d + f + 7)\varepsilon\varepsilon^* \\ 1 + b\varepsilon + d\varepsilon^* + f\varepsilon\varepsilon^* \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Ayrıca (4.33) eşitliğinde verilen A matrisinin karakteristik polinomu

$$f_A(\Lambda) = (\Lambda - 2 + 2\varepsilon)(\Lambda - 4 - 2\varepsilon)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 4.5. Aşağıdaki hiperdual matrisi ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* & \varepsilon + \varepsilon\varepsilon^* \\ 0 & 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \end{bmatrix} \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{2 \times 2}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}, \quad D' = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.30) eşitliğinden, A_s matrisinin özdeğeri

$$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = 1$$

olarak elde edilir. Bu özdeğere karşılık gelen özvektörler ise

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.24), (4.25) ve (4.26) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki determinantlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
\det[\tilde{D}(1, \lambda)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} - 1 & -1 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} - \lambda_{d_1} - \lambda_s + 1, \\
\det[\tilde{D}(2, \lambda)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{d_1} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} - \lambda_{d_1} - \lambda_s + 1, \\
\det[\tilde{A}(1, \Lambda)_s] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_2} - \lambda_s - \lambda_{d_2} + 1, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)_s] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{d_2} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_2} - \lambda_s - \lambda_{d_2} + 1, \\
\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(1)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_3} - 1 & -1 \\ 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_3} - \lambda_{d_3} - \lambda_s + 1, \\
\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(2)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{d_1} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_{d_1} - \lambda_{d_2} + 1, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(1)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} - 1 & -1 \\ 0 & \lambda_{d_2} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_{d_1} - \lambda_{d_2} + 1, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(2)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{d_3} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_3} - \lambda_{d_3} - \lambda_s + 1.
\end{aligned}$$

(4.18) eşitliği yardımıyla A hiperdual matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}
f_A(\Lambda) &= \lambda_s^2 - 2\lambda_s + 1 + (2\lambda_s \lambda_{d_1} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_1} + 2)\varepsilon \\
&\quad + (2\lambda_s \lambda_{d_2} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_2} + 2)\varepsilon^* \\
&\quad + (2\lambda_s \lambda_{d_3} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_3} + 2 + 2\lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_1} - 2\lambda_{d_2} + 2)\varepsilon \varepsilon^*
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$(\lambda_s)_1 = 1$ için

$$f_A(\Lambda) = (2\lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_1} - 2\lambda_{d_2} + 2)\varepsilon \varepsilon^*$$

elde edilir. Dolayısıyla $f_A(\Lambda) = 0$ olması için

$$(\lambda_{d_1} - 1)(\lambda_{d_2} - 1) = 0$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. $(\lambda_{d_1})_1 = 1$, $(\lambda_{d_2})_1 = 1$ ve $(\lambda_{d_3})_1 \in \mathbb{R}$ alınırsa, Teorem 4.3 gereğince

$$\Lambda = 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + (\lambda_{d_3})_1 \varepsilon \varepsilon^*$$

değeri A hiperdual matrisinin bir karakteristik köküdür.

$$x_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{d_1} = \begin{bmatrix} x_{d_1,1} \\ x_{d_1,2} \end{bmatrix}, \quad x_{d_2} = \begin{bmatrix} x_{d_2,1} \\ x_{d_2,2} \end{bmatrix}, \quad x_{d_3} = \begin{bmatrix} x_{d_3,1} \\ x_{d_3,2} \end{bmatrix}$$

alındığında, Teorem 4.4 gereğince

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_{d_3})_1 - 1 - x_{d_2,2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$(\lambda_{d_3})_1 = 1 + x_{d_2,2} \in \mathbb{R}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\Lambda = 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + (1 + x_{d_2,2})\varepsilon\varepsilon^*$$

değeri A hiperdual matrisinin bir özdeğeridir.

Sonuç olarak, $x_{d_2,2} \in \mathbb{R}$ keyfi olarak seçilebildiğinden, A hiperdual matrisinin sonsuz çoklukta özdeğeri vardır.

5 UYGULAMALAR

Bu bölümde, aşağıdaki biçime sahip özel bir tipteki 3×3 dual ve hiperdual tridiagonal matrisler ele alınmaktadır:

$$\begin{bmatrix} x & 2y & 0 \\ y & x & y \\ 0 & 2y & x \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Tez çalışması boyunca, literatürde yer alan teori ve bu tezde geliştirilen teorik çerçeve, (5.1) eşitliğinde verilen özel tipteki 3×3 tridiagonal matris üzerinde uygulanmaktadır. Bu kapsamda, (5.1) eşitliğinde verilen tridiagonal matrisin özdeğer ve özvektör yapısı elemanlarının dual ve hiperdual olmasına göre incelenecektir. Sonuç 5.1 ve Sonuç 5.2, söz konusu özdeğerlerin yapısal özelliklerini ortaya koymaktadır.

5.1 3×3 Dual Tridiagonal Matrislere Uygulama

Bu alt bölümde, (5.1) eşitliğinde verilen formda 3×3 dual tridiagonal matrisler ele alınmaktadır.

Sonuç 5.1. $\hat{A} = A_s + A_d\varepsilon \in \mathbb{D}^{3 \times 3}$, $\hat{x} \in \mathbb{D}$ ve $0 \neq \hat{y} \in \mathbb{D}$ olmak üzere, $\hat{A}$, (5.1) eşitliğinde verilen formda bir dual tridiagonal matris olsun. Teorem 3.3 gereğince, $\hat{A}$ matrisinin özdeğerlerinin standart kısmı A_s reel matrisinin özdeğerlerinden, dual kısmı ise A_d reel matrisinin özdeğerlerinden elde edilir.

Not 5.1. $\hat{x} = x_1 + x_2\varepsilon$ ve $0 \neq \hat{y} = y_1 + y_2\varepsilon \in \mathbb{D}$ ($i = 1, 2$ için $\exists y_i \neq 0$) olmak üzere, (5.1) formundaki $\hat{A} \in \mathbb{D}^{3 \times 3}$ dual tridiagonal matrisi ele alalım:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2\varepsilon & 2y_1 + 2y_2\varepsilon & 0 \\ y_1 + y_2\varepsilon & x_1 + x_2\varepsilon & y_1 + y_2\varepsilon \\ 0 & 2y_1 + 2y_2\varepsilon & x_1 + x_2\varepsilon \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Burada A_s ve A_d reel matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$A_s = \begin{bmatrix} x_1 & 2y_1 & 0 \\ y_1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 2y_1 & x_1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} x_2 & 2y_2 & 0 \\ y_2 & x_2 & y_2 \\ 0 & 2y_2 & x_2 \end{bmatrix}.$$

Teorem 3.3 doğrultusunda, A_s matrisinin özdeğerlerinin cebirsel katlılıklarına bağlı olarak iki durum ortaya çıkar:

Durum 1: Eğer $y_1 = 0$ ise A_s matrisinin cebirsel katlılığı üç olan tek bir özdeğeri vardır.

Durum 2: Eğer $y_1 \neq 0$ ise A_s matrisinin özdeğerleri birbirinden farklıdır ve her birinin cebirsel katlılığı birdir.

Bu iki durum için A_s , A_d ve $\hat{A}$ matrislerinin özdeğerleri ile özvektörleri Tablo 5.1 içinde verilmiştir. Tablo 5.1, (5.2) eşitliğinde verilen $\hat{A}$ dual matrisinin özdeğerlerinin A_s ve A_d matrislerinin özdeğerleri aracılığıyla ifade edilebildiğini göstermektedir. Bu durum, Sonuç 5.1 ile uyumludur.

Ayrıca, (5.2) eşitliğinde verilen $\hat{A}$ dual tridiagonal matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri, [82] kaynağında kullanılan yöntemle de elde edilebilir¹.

¹(5.1) denklemindeki formda verilen $\hat{A}$ dual tridiagonal matrisinin özdeğerleri λ_k ile gösterilirse ($k = 1, 2, \dots, n$), bu özdeğerler $\lambda_k = x + 2y \cos \frac{(k-1)\pi}{n-1}$ formülüyle hesaplanabilir [82, 83].

Tablo 5.1 A_s , A_d ve $\hat{A}$ Matrislerinin Özdeğerleri ve Özvektörleri

$y_1 = 0$ ise			$y_1 \neq 0$ ve $y_2 = 0$ ise			$y_1 \neq 0$ ve $y_2 \neq 0$ ise		
Matris	Özdeğer	Özvektör	Matris	Özdeğer	Özvektör	Matris	Özdeğer	Özvektör
A_s	x_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$	A_s	$x_1 - 2y_1$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$	A_s	$x_1 - 2y_1$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_s	x_1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$	A_s	x_1	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$	A_s	x_1	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_s	x_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$	A_s	$x_1 + 2y_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$	A_s	$x_1 + 2y_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_d	$x_2 - 2y_2$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$	A_d	x_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$	A_d	$x_2 - 2y_2$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_d	x_2	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$	A_d	x_2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$	A_d	x_2	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_d	$x_2 + 2y_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$	A_d	x_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$	A_d	$x_2 + 2y_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
$\hat{A}$	$x_1 + (x_2 - 2y_2)\varepsilon$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top + x_{d_1}\varepsilon$	$\hat{A}$	$x_1 - 2y_1 + x_2\varepsilon$	$\begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ -1-\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$	$\hat{A}$	$x_1 - 2y_1 + (x_2 - 2y_2)\varepsilon$	$\begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ -1-\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$
$\hat{A}$	$x_1 + x_2\varepsilon$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top + x_{d_2}\varepsilon$	$\hat{A}$	$x_1 + x_2\varepsilon$	$\begin{bmatrix} -1-\varepsilon \\ 0 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$	$\hat{A}$	$x_1 + x_2\varepsilon$	$\begin{bmatrix} -1-\varepsilon \\ 0 \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$
$\hat{A}$	$x_1 + (x_2 + 2y_2)\varepsilon$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top + x_{d_3}\varepsilon$	$\hat{A}$	$x_1 + 2y_1 + x_2\varepsilon$	$\begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$	$\hat{A}$	$x_1 + 2y_1 + (x_2 + 2y_2)\varepsilon$	$\begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon \end{bmatrix}$

Örnek 5.1. Aşağıdaki dual tridiagonal matrisi ele alalım:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon & 2\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 + \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 2\varepsilon & 1 + \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathbb{D}^{3 \times 3}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (3.21) eşitliğinden A_s matrisinin özdeğerleri

$$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = (\lambda_s)_3 = 1$$

olarak elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (3.12) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \det[\tilde{A}(1, \lambda)] &= \begin{vmatrix} \lambda_d - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_d - 2\lambda_s \lambda_d + \lambda_d - \lambda_s^2 + 2\lambda_s - 1, \\ \det[\tilde{A}(2, \lambda)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_d - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda_s - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_d - 2\lambda_s \lambda_d + \lambda_d - \lambda_s^2 + 2\lambda_s - 1, \\ \det[\tilde{A}(3, \lambda)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s - 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda_d - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_d - 2\lambda_s \lambda_d + \lambda_d - \lambda_s^2 + 2\lambda_s - 1 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.10) eşitliği yardımıyla $\hat{A}$ matrisinin karakteristik polinomu

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = \lambda_s^3 - 3\lambda_s^2 + 3\lambda_s - 1 + (3\lambda_s^2 \lambda_d - 6\lambda_s \lambda_d + 3\lambda_d - 3\lambda_s^2 + 6\lambda_s - 3)\varepsilon \quad (5.3)$$

şeklinde elde edilir.

$(\lambda_s)_1 = (\lambda_s)_2 = (\lambda_s)_3 = 1$ için $f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = 0$ olur. Buradan, Önerme 3.1 gereğince $\lambda_d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\hat{\lambda} = 1 + \lambda_d \varepsilon$$

değeri $\hat{A}$ dual matrisinin karakteristik köküdür.

$$(\lambda_s)_1 = 1, \quad (x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_d \in \mathbb{R}, \quad (x_d)_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

alınırsa, (3.22) eşitliği

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_d - 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Benzer şekilde,

$$(\lambda_s)_2 = 1, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_d \in \mathbb{R}, \quad (x_d)_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

için

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \lambda_d - 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son olarak,

$$(\lambda_s)_3 = 1, \quad (x_s)_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_d \in \mathbb{R}, \quad (x_d)_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

alındığında

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \lambda_d - 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bu üç seçim için λ_d değerini sağlayan bir çözüm bulunmamaktadır. Bununla birlikte, bu sonuç $\hat{A}$ dual matrisinin özdeğere sahip olmadığı anlamına gelmez. Bu nedenle

$$x_s = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alnırsa (3.21) eşitliği sağlanır ve (3.22) eşitliği

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\lambda_d - 1) - 2b \\ -a + b(\lambda_d - 1) - c \\ -2b + c(\lambda_d - 1) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

formunu alır. (5.4) denkleminin çözümüünden

$$(\lambda_d)_1 = -1, \quad (\lambda_d)_2 = 1, \quad (\lambda_d)_3 = 3$$

ve

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\hat{A}$ dual tridiagonal matrisinin özdeğerleri

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= (\lambda_s)_1 + (\lambda_d)_1 \varepsilon = 1 - \varepsilon, \\ \hat{\lambda}_2 &= (\lambda_s)_2 + (\lambda_d)_2 \varepsilon = 1 + \varepsilon, \\ \hat{\lambda}_3 &= (\lambda_s)_3 + (\lambda_d)_3 \varepsilon = 1 + 3\varepsilon \end{aligned}$$

olup, karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_d)_1 \varepsilon, \quad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_d)_2 \varepsilon, \quad \hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_d)_3 \varepsilon$$

şeklindedir.

Ayrıca, $\hat{A}$ dual tridiagonal matrisinin karakteristik polinomu (5.3) eşitliği kullanılarak

$$f_{\hat{A}}(\hat{\lambda}) = (\hat{\lambda} - 1 + \varepsilon)(\hat{\lambda} - 1 - \varepsilon)(\hat{\lambda} - 1 - 3\varepsilon)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu örnekte elde edilen özdeğer ve özvektörler, Not 5.1 kullanılarak da belirlenebilir. Nitekim $\hat{x} = x_1 + x_2 \varepsilon = 1 + \varepsilon$ ve $\hat{y} = y_1 + y_2 \varepsilon = \varepsilon$ seçimi için aynı sonuçlara Tablo 5.1 aracılığıyla da ulaşılır.

5.2 3×3 Hiperdual Tridiagonal Matrislere Uygulama

Bu alt bölümde, (5.1) eşitliğinde verilen formda 3×3 hiperdual tridiagonal matrisler ele alınmaktadır.

Sonuç 5.2. $A = A_s + A_{d_1}\varepsilon + A_{d_2}\varepsilon^* + A_{d_3}\varepsilon\varepsilon^* = D + D'\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{3 \times 3}$, $x \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ ve $0 \neq y \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ olsun. A , (5.1) formunda bir hiperdual tridiagonal matris ise Teorem 4.4 gereğince A hiperdual matrisinin özdeğerleri, A_s , A_{d_1} , A_{d_2} ve A_{d_3} reel matrislerinin özdeğerlerinin kombinasyonu biçimindedir. Burada standart kısım A_s reel matrisinin özdeğerlerinden, hiperdual kısım ise sırasıyla A_{d_1} , A_{d_2} ve A_{d_3} reel matrislerinin özdeğerlerinden oluşmaktadır.

Not 5.2. $x = x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^* + x_4\varepsilon\varepsilon^*$ ve $0 \neq y = y_1 + y_2\varepsilon + y_3\varepsilon^* + y_4\varepsilon\varepsilon^* \in \mathbb{H}\mathbb{D}$ ($i = 1, 2, 3, 4$ için $\exists y_i \neq 0$) olmak üzere, (5.1) formundaki $A \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{3 \times 3}$ hiperdual tridiagonal matrisi ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^* + x_4\varepsilon\varepsilon^* & 2y_1 + 2y_2\varepsilon + 2y_3\varepsilon^* + 2y_4\varepsilon\varepsilon^* & 0 \\ y_1 + y_2\varepsilon + y_3\varepsilon^* + y_4\varepsilon\varepsilon^* & x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^* + x_4\varepsilon\varepsilon^* & y_1 + y_2\varepsilon + y_3\varepsilon^* + y_4\varepsilon\varepsilon^* \\ 0 & 2y_1 + 2y_2\varepsilon + 2y_3\varepsilon^* + 2y_4\varepsilon\varepsilon^* & x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^* + x_4\varepsilon\varepsilon^* \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Burada A_s , A_{d_1} , A_{d_2} ve A_{d_3} reel matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$A_s = \begin{bmatrix} x_1 & 2y_1 & 0 \\ y_1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 2y_1 & x_1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} x_2 & 2y_2 & 0 \\ y_2 & x_2 & y_2 \\ 0 & 2y_2 & x_2 \end{bmatrix},$$

$$A_{d_2} = \begin{bmatrix} x_3 & 2y_3 & 0 \\ y_3 & x_3 & y_3 \\ 0 & 2y_3 & x_3 \end{bmatrix}, \quad A_{d_3} = \begin{bmatrix} x_4 & 2y_4 & 0 \\ y_4 & x_4 & y_4 \\ 0 & 2y_4 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Teorem 4.4 yardımıyla ve A_s matrisinin özdeğerlerinin cebirsel katlılıkları dikkate alındığında iki durum ortaya çıkar:

Durum 1: A_s matrisinin özdeğerlerinin cebirsel katlılığı üç olsun. Bu durum $y_1 = 0$ olmasına denktir. Keyfi x_{d_3} değerleri için A_s , A_{d_1} , A_{d_2} , A_{d_3} ve A matrislerinin özdeğerleri ile karşılık gelen özvektörleri Tablo 5.2 ile verilmiştir. Ayrıca, keyfi x_{d_1} , x_{d_2} ve x_{d_3} değerleri için A matrisinin özdeğer ve özvektörleri Tablo 5.3 ile ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Durum 2: A_s matrisinin özdeğerlerinin cebirsel katlılığı bir olsun. Bu durum $y_1 \neq 0$ olmasına denktir. A_s , A_{d_1} , A_{d_2} , A_{d_3} ve A matrislerinin özdeğerleri ile karşılık gelen özvektörleri Tablo 5.4 ile verilmiştir. Ayrıca, A matrisinin özdeğer ve özvektörleri farklı durumlar altında Tablo 5.5 ile ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Tablo 5.2 $y_1 = 0$ için $A_s, A_{d_1}, A_{d_2}, A_{d_3}$ ve A Matrislerinin Özdeğerleri ve Özevektörleri

Matris	Özdeğerler	Özevektörler
A_s	x_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$
	x_1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$
	x_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_{d_1}	$x_2 - 2y_2$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	x_2	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	$x_2 + 2y_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_{d_2}	$x_3 - 2y_3$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	x_3	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	$x_3 + 2y_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_{d_3}	$x_4 - 2y_4$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	x_4	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	$x_4 + 2y_4$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A	$x_1 + (x_2 - 2y_2)\varepsilon + (x_3 - 2y_3)\varepsilon^* + (x_4 - 2y_4)\varepsilon\varepsilon^*$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$
	$x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^* + x_4\varepsilon\varepsilon^*$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$
	$x_1 + (x_2 + 2y_2)\varepsilon + (x_3 + 2y_3)\varepsilon^* + (x_4 + 2y_4)\varepsilon\varepsilon^*$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon^* + x_{d_3}\varepsilon\varepsilon^*$

Tablo 5.4 $y_1 \neq 0$ için $A_s, A_{d_1}, A_{d_2}, A_{d_3}$ ve A Matrislerinin Özdeğerleri ve Özvektörleri

Matris	Özdeğerler	Özvektörler
A_s	$x_1 - 2y_1$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	x_1	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	$x_1 + 2y_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_{d_1}	$x_2 - 2y_2$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	x_2	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	$x_2 + 2y_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_{d_2}	$x_3 - 2y_3$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	x_3	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	$x_3 + 2y_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A_{d_3}	$x_4 - 2y_4$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	x_4	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$
	$x_4 + 2y_4$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$
A	$(x_1 - 2y_1) + (x_2 - 2y_2)\varepsilon + (x_3 - 2y_3)\varepsilon^* + (x_4 - 2y_4)\varepsilon\varepsilon^*$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon^* + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon\varepsilon^*$
	$x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^* + x_4\varepsilon\varepsilon^*$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon^* + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon\varepsilon^*$
	$(x_1 + 2y_1) + (x_2 + 2y_2)\varepsilon + (x_3 + 2y_3)\varepsilon^* + (x_4 + 2y_4)\varepsilon\varepsilon^*$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon^* + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top \varepsilon\varepsilon^*$

Buna göre, Sonuç 5.2 doğrultusunda Tablo 5.2, Tablo 5.3, Tablo 5.4 ve Tablo 5.5 incelendiğinde, (5.5) denkleminde verilen $A \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{3 \times 3}$ matrisinin özdeğerlerinin A_s , A_{d_1} , A_{d_2} ve A_{d_3} reel matrislerinin özdeğerlerinin kombinasyonu şeklinde yazılabildiği görülmektedir.

Birinci durumda, A_s matrisinin cebirsel katlılığı üç olan tek bir özdeğere sahip olması nedeniyle, hiperdual tridiagonal A matrisinin standart kısmına ait özvektörler A_s matrisinin özvektörleri ile örtüşmemektedir. Bu durum Tablo 5.2 ile görülmektedir.

İkinci durumda ise A_s matrisinin özdeğerleri birbirinden farklı olduğundan, hiperdual tridiagonal A matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri, A_s , A_{d_1} , A_{d_2} ve A_{d_3} matrislerine ait özdeğer ve özvektörlerin kombinasyonları biçiminde ifade edilebilmektedir. Bu durum Tablo 5.4 ile gösterilmektedir.

Örnek 5.2. Aşağıdaki hiperdual tridiagonal matrisi ele alalım:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon + \varepsilon\varepsilon^* & 2 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^* + 2\varepsilon\varepsilon^* & 0 \\ 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* & \varepsilon + \varepsilon\varepsilon^* & 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \\ 0 & 2 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^* + 2\varepsilon\varepsilon^* & \varepsilon + \varepsilon\varepsilon^* \end{bmatrix} \in \mathbb{H}\mathbb{D}^{3 \times 3}.$$

Burada

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$D = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 + 2\varepsilon & 0 \\ 1 + \varepsilon & \varepsilon & 1 + \varepsilon \\ 0 & 2 + 2\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad D' = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 + 2\varepsilon & 0 \\ 1 + \varepsilon & \varepsilon & 1 + \varepsilon \\ 0 & 2 + 2\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(4.30) eşitliği yardımıyla A_s matrisinin özdeğerleri

$$(\lambda_s)_1 = -2, \quad (\lambda_s)_2 = 0, \quad (\lambda_s)_3 = 2$$

olarak elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$(x_s)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x_s)_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(4.24), (4.25) ve (4.26) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki determinantlar hesaplanır:

$$\det[\tilde{D}(1, \lambda)] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} - 1 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_{d_1} - \lambda_s^2 - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_1} + 2,$$

$$\det[\tilde{D}(2, \lambda)] = \begin{vmatrix} \lambda_s & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_1} - 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_{d_1} - \lambda_s^2 - 4\lambda_s,$$

$$\det[\tilde{D}(3, \lambda)] = \begin{vmatrix} \lambda_s & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_{d_1} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_{d_1} - \lambda_s^2 - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_1} + 2,$$

$$\det[\tilde{A}(1, \Lambda)_s] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_{d_2} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_2},$$

$$\det[\tilde{A}(2, \Lambda)_s] = \begin{vmatrix} \lambda_s & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_2} & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_{d_2} - 4\lambda_s,$$

$$\det[\tilde{A}(3, \Lambda)_s] = \begin{vmatrix} \lambda_s & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_{d_2} \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_{d_2} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_2},$$

$$\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(1)] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_3} - 1 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_{d_3} - \lambda_s^2 - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_3} + 2,$$

$$\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(2)] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_1} - 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_s \lambda_{d_2} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_2},$$

$$\det[\tilde{A}(1, \Lambda)(3)] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_2} & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_{d_1} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_s \lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_1} - 2\lambda_{d_2} + 2,$$

$$\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(1)] = \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} - 1 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_2} & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_s \lambda_{d_2} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_1} + 2,$$

$$\begin{aligned}
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(2)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_3} - 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_{d_3} - \lambda_s^2 - 4\lambda_s, \\
\det[\tilde{A}(2, \Lambda)(3)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_2} & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_{d_1} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_s \lambda_{d_2} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_1} + 2, \\
\det[\tilde{A}(3, \Lambda)(1)] &= \begin{vmatrix} \lambda_{d_1} - 1 & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_{d_2} \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_s \lambda_{d_2} - 2\lambda_{d_1} - 2\lambda_{d_2} + 2, \\
\det[\tilde{A}(3, \Lambda)(2)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_{d_1} - 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_{d_2} \end{vmatrix} = \lambda_s \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - \lambda_s \lambda_{d_2} - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_2}, \\
\det[\tilde{A}(3, \Lambda)(3)] &= \begin{vmatrix} \lambda_s & -2 & 0 \\ -1 & \lambda_s & -1 \\ 0 & -2 & \lambda_{d_3} - 1 \end{vmatrix} = \lambda_s^2 \lambda_{d_3} - \lambda_s^2 - 2\lambda_s - 2\lambda_{d_3} + 2.
\end{aligned}$$

(4.18) eşitliği yardımıyla A hiperdual tridiagonal matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}
f_A(\Lambda) &= \lambda_s^3 - 4\lambda_s + (3\lambda_s^2 \lambda_{d_1} - 3\lambda_s^2 - 8\lambda_s - 4\lambda_{d_1} + 4)\varepsilon \\
&\quad + (3\lambda_s^2 \lambda_{d_2} - 8\lambda_s - 4\lambda_{d_2})\varepsilon^* \\
&\quad + (3\lambda_s^2 \lambda_{d_3} + 6\lambda_s \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - 6\lambda_s \lambda_{d_2} - 3\lambda_s^2 - 16\lambda_s - 8\lambda_{d_1} - 8\lambda_{d_2} - 4\lambda_{d_3} + 12)\varepsilon\varepsilon^*
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$(\lambda_s)_1 = -2 \text{ için}$$

$$f_A(\Lambda) = (8\lambda_{d_1} + 8)\varepsilon + (8\lambda_{d_2} + 16)\varepsilon^* + (-12\lambda_{d_1} \lambda_{d_2} - 8\lambda_{d_1} + 4\lambda_{d_2} + 8\lambda_{d_3} + 32)\varepsilon\varepsilon^*$$

elde edilir. Buradan $f_A(\Lambda) = 0$ için

$$(\lambda_{d_1})_1 = -1, \quad (\lambda_{d_2})_1 = -2, \quad (\lambda_{d_3})_1 = -1$$

bulunur.

$$(\lambda_s)_2 = 0 \text{ için}$$

$$f_A(\Lambda) = (-4\lambda_{d_1} + 4)\varepsilon - 4\lambda_{d_2}\varepsilon^* + (-8\lambda_{d_1} - 8\lambda_{d_2} - 4\lambda_{d_3} + 12)\varepsilon\varepsilon^*$$

elde edilir. Buradan $f_A(\Lambda) = 0$ için

$$(\lambda_{d_1})_2 = 1, \quad (\lambda_{d_2})_2 = 0, \quad (\lambda_{d_3})_2 = 1$$

bulunur.

$(\lambda_s)_3 = 2$ için

$$f_A(\Lambda) = (8\lambda_{d_1} - 24)\varepsilon + (8\lambda_{d_2} - 16)\varepsilon^* + (12\lambda_{d_1}\lambda_{d_2} - 8\lambda_{d_1} - 20\lambda_{d_2} + 8\lambda_{d_3} - 32)\varepsilon\varepsilon^*$$

elde edilir. Buradan $f_A(\Lambda) = 0$ için

$$(\lambda_{d_1})_3 = 3, \quad (\lambda_{d_2})_3 = 2, \quad (\lambda_{d_3})_3 = 3$$

bulunur.

Teorem 4.2 yardımıyla A hiperdual tridiagonal matrisinin karakteristik kökleri

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= (\lambda_s)_1 + (\lambda_{d_1})_1\varepsilon + (\lambda_{d_2})_1\varepsilon^* + (\lambda_{d_3})_1\varepsilon\varepsilon^* = -2 - \varepsilon - 2\varepsilon^* - \varepsilon\varepsilon^*, \\ \Lambda_2 &= (\lambda_s)_2 + (\lambda_{d_1})_2\varepsilon + (\lambda_{d_2})_2\varepsilon^* + (\lambda_{d_3})_2\varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon + \varepsilon\varepsilon^*, \\ \Lambda_3 &= (\lambda_s)_3 + (\lambda_{d_1})_3\varepsilon + (\lambda_{d_2})_3\varepsilon^* + (\lambda_{d_3})_3\varepsilon\varepsilon^* = 2 + 3\varepsilon + 2\varepsilon^* + 3\varepsilon\varepsilon^* \end{aligned} \quad (5.6)$$

şeklinde elde edilir. Bu karakteristik kökler *Teorem 4.3* kullanılarak da elde edilebilir. Ayrıca, (5.6) eşitliğinde verilen karakteristik kökler, *Teorem 4.4* gereğince A matrisinin özdeğerleridir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \\ -1 - \varepsilon - \varepsilon^* - \varepsilon\varepsilon^* \\ 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -1 - \varepsilon - \varepsilon^* - \varepsilon\varepsilon^* \\ 0 \\ 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \\ 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \\ 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \end{bmatrix}$$

şeklinde dir.

Ayrıca, A hiperdual tridiagonal matrisinin karakteristik polinomu

$$f_A(\Lambda) = (\Lambda + 2 + \varepsilon + 2\varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^*)(\Lambda - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon^*)(\Lambda - 2 - 3\varepsilon - 2\varepsilon^* - 3\varepsilon\varepsilon^*)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu örnekte elde edilen özdeğer ve özvektörler, *Not 5.2* kullanılarak da belirlenebilir. Nitekim,

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^* + x_4\varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon + \varepsilon\varepsilon^*, \\ y &= y_1 + y_2\varepsilon + y_3\varepsilon^* + y_4\varepsilon\varepsilon^* = 1 + \varepsilon + \varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^* \end{aligned}$$

seçimiyle aynı sonuçlara *Tablo 5.4* kullanılarak ulaşılır.

6 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, hiperdual matrisler için determinant kavramı yeni bir yaklaşımla tanımlanmıştır. Buna bağlı olarak hiperdual matrisler için karakteristik polinom tanımı verilmiş, karakteristik kökler incelenmiş ve bu kökler ile özdeğerler arasındaki ilişki belirlenmiştir. Ayrıca özdeğerlerin ve karşılık gelen özvektörlerin elde edilmesine ilişkin koşullar sistematik biçimde ortaya konulmuş, elde edilen teorem ve sonuçlar çeşitli örneklerle desteklenmiştir.

Çalışmada, bir $n \times n$ hiperdual matrisin en fazla n özdeğere sahip olabileceği, hiç özdeğere sahip olmayabileceği veya sonsuz sayıda özdeğere sahip olabileceği ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar, hiperdual matrislerde karakteristik köklerin her zaman özdeğer olarak değerlendirilemeyeceğini ve özdeğer-özvektörlerin belirlenmesinde ek koşulların dikkate alınması gerektiğini göstermektedir.

Ayrıca, 3×3 tridiagonal matrisler üzerinde geliştirilen teoremin uygulamasını içeren bir bölüm sunulmuştur. Bu bölümde, literatürde yer alan dual teori özel bir tipteki 3×3 dual tridiagonal matrisler üzerinde uygulanmış; bu tezde geliştirilen teori ise özel bir tipteki 3×3 hiperdual tridiagonal matrisler üzerinde ele alınmıştır. Tridiagonal matrislerin diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü, haberleşme sistemlerinin analizi, paralel hesaplama ve kodlama kuramı gibi alanlarda kullanılması, bu matrisleri özdeğer problemleri açısından önemli kılmaktadır. Bu nedenle ele alınan uygulama, geliştirilen teoremin açık ve hesaplanabilir bir biçimde incelenmesine imkân sağlamıştır.

Sonuç olarak bu çalışma, lineer cebirin determinant, karakteristik polinom, karakteristik kök, özdeğer ve özvektör gibi temel kavramlarını hiperdual matrisler çerçevesinde ele almaktadır. Elde edilen sonuçların, hiperdual matrislerin kuramsal yapısına katkı sunacağı ve farklı tipteki hiperdual tridiagonal matrisler ile daha yüksek boyutlu hiperdual tridiagonal matrisler üzerine yapılacak çalışmalara zemin hazırlayacağı düşünülmektedir.

- [1] W. K. Clifford, *Mathematical Papers by William Kingdon Clifford: Edited by Robert Tucker, with an introduction by HJ Stephen Smith*. London: Macmillan, 1882.
- [2] P. Fjelstad, "Extending Special Relativity via the Perplex Numbers," *American Journal of Physics*, c. 54, no. 5, ss. 416–422, 1986.
- [3] G. Sobczyk, "The Hyperbolic Number Plane," *The College Mathematics Journal*, c. 26, no. 4, ss. 268–280, 1995.
- [4] I. M. Yaglom, *A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, An Elementary Account of Galilean Geometry and the Galilean Principle of Relativity* (Heidelberg Science Library), 1. bs., B. Gordon, ed. New York, NY: Springer-Verlag, 1979, s. 307. doi: 10.1007/978-1-4612-6135-3.
- [5] I. M. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry*, çev. E. J. F. Primrose. New York ve London: Academic Press, 1968.
- [6] E. Pennestrì R. Stefanelli, "Linear Algebra and Numerical Algorithms Using Dual Numbers," *Multibody Syst. Dyn.*, c. 18, no. 3, ss. 323–344, 2007. doi: 10.1007/s11044-007-9088-9.
- [7] E. Study, *Geometrie der Dynamen*. Leipzig: B.G. Teubner, 1903.
- [8] W. K. Clifford, "Preliminary sketch of biquaternions," *Proceedings of the London Mathematical Society*, c. s1-4, no. 1, ss. 381–395, 1871. doi: 10.1112/plms/s1-4.1.381.
- [9] A. P. Kotelnikov, "Screw Calculus and Some Applications to Geometry and Mechanics," *Annals of the Imperial University of Kazan*, c. 24, 1895.
- [10] F. M. Dimentberg, *The Screw Calculus and Its Applications in Mechanics*. 1968.
- [11] I. S. Fischer, *Dual-Number Methods in Kinematics, Statics, and Dynamics*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2017.
- [12] J. M. McCarthy, *Introduction to Theoretical Kinematics*. Cambridge, MA: MIT Press, 1990.
- [13] L. Brand, *Vector and Tensor Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1947.
- [14] G. R. Veldkamp, "On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous Spatial Kinematics," *Mechanism and Machine Theory*, c. 11, no. 2, ss. 141–156, 1976.
- [15] D. P. Chevallier, "Lie Algebras, Modules, Dual Quaternions and Algebraic Methods in Kinematics," *Mechanism and Machine Theory*, c. 26, no. 6, ss. 613–627, 1991. doi: 10.1016/0094-114X(91)90043-4.

- [16] K. Hao, "Dual Number Method, Rank of a Screw System and Generation of Lie Sub-Algebras," *Mechanism and Machine Theory*, c. 33, no. 7, ss. 1063–1084, 1998. doi: 10.1016/S0094-114X(97)00121-3.
- [17] J. Angeles, "The Application of Dual Algebra to Kinematic Analysis," içinde *Computational Methods in Mechanical Systems*, J. Angeles E. Zakhariev, ed., Dordrecht: Springer, 1998, ss. 3–32. doi: 10.1007/978-3-662-03729-4_1.
- [18] J. Angeles, "The Dual Generalized Inverses and Their Applications in Kinematic Synthesis," içinde *Latest Advances in Robot Kinematics*, J. Lenarcic M. Husty, ed., Dordrecht: Springer Netherlands, 2012, ss. 1–10. doi: 10.1007/978-94-007-4620-6_1.
- [19] A. T. Yang F. Freudenstein, "Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms," *Journal of Applied Mechanics*, c. 31, no. 2, ss. 300–308, 1964. doi: 10.1115/1.3629601.
- [20] K. Sugimoto J. Duffy, "Application of Linear Algebra to Screw Systems," *Mechanism and Machine Theory*, c. 17, no. 1, ss. 73–83, 1982. doi: 10.1016/0094-114X(82)90025-8.
- [21] G. R. Pennock A. T. Yang, "Application of Dual-Number Matrices to the Inverse Kinematics Problem of Robot Manipulators," *Journal of Mechanical Design*, c. 107, no. 2, ss. 201–208, 1985. doi: 10.1115/1.3258709.
- [22] D. de Falco, E. Pennestri F. E. Udwadia, "On Generalized Inverses of Dual Matrices," *Mechanism and Machine Theory*, c. 123, ss. 89–106, 2018. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2017.11.020.
- [23] L. Qi C. Cui, "Eigenvalues and Jordan Forms of Dual Complex Matrices," *Commun. Appl. Math. Comput.*, c. 7, no. 4, ss. 1225–1241, 2025. doi: 10.1007/s42967-023-00299-1.
- [24] L. Qi C. Cui, "Eigenvalues of Dual Hermitian Matrices with Application in Formation Control," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, c. 45, no. 4, ss. 2135–2154, 2024. doi: 10.1137/24M1652234.
- [25] C. Ling L. Qi, "Quasi-Determinant and Right Eigenvalues of Dual Quaternion Matrices," *arXiv*, 2024. doi: 10.48550/arXiv.2404.19348.
- [26] L. Qi, C. Ling H. Yan, "Dual Quaternions and Dual Quaternion Vectors," *Commun. Appl. Math. Comput.*, c. 4, no. 4, ss. 1494–1508, 2022. doi: 10.1007/s42967-022-00189-y.
- [27] L. Qi, D. M. Alexander, Z. Chen, C. Ling Z. Luo, "Low Rank Approximation of Dual Complex Matrices," *arXiv*, 2022. doi: 10.48550/arXiv.2201.12781.
- [28] L. Qi C. Cui, "Dual Number Matrices with Primitive and Irreducible Nonnegative Standard Parts," *arXiv*, 2023. doi: 10.48550/arXiv.2306.16140.
- [29] R. Xu, T. Wei, Y. Wei P. Xie, "QR Decomposition of Dual Matrices and Its Application," *Appl. Math. Lett.*, c. 156, s. 109 144, 2024. doi: 10.1016/j.aml.2024.109144.

- [30] R. Xu, T. Wei, Y. Wei H. Yan, "UTV Decomposition of Dual Matrices and Its Applications," *Comput. Appl. Math.*, c. 43, no. 1, s. 41, 2024. doi: 10 . 1007/s40314-023-02565-7.
- [31] C. Cui, Y. Lu, L. Qi L. Wang, "Spectral Properties of Dual Unit Gain Graphs," *Symmetry*, c. 16, no. 9, s. 1142, 2024. doi: 10 . 3390/sym16091142.
- [32] C. Cui L. Qi, "A Power Method for Computing the Dominant Eigenvalue of a Dual Quaternion Hermitian Matrix," *J. Sci. Comput.*, c. 100, no. 1, s. 21, 2024. doi: 10 . 1007/s10915-024-02561-x.
- [33] T. Wei, W. Ding Y. Wei, "Singular Value Decomposition of Dual Matrices and Its Application to Traveling Wave Identification in the Brain," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, c. 45, no. 1, ss. 634–660, 2024. doi: 10 . 1137 / 23M1556642.
- [34] Y. Chen L. Zhang, "Applications of Dual Complex Adjoint Matrix in Eigenvalue Computation of Dual Quaternion Hermitian Matrix," *arXiv*, 2024.
- [35] C. Cui L. Qi, "A Genuine Extension of the Moore–Penrose Inverse to Dual Matrices," *J. Comput. Appl. Math.*, c. 454, s. 116 185, 2025. doi: 10 . 1016 / j . cam . 2024 . 116185.
- [36] A. Dağdeviren, "Lorentz matris çarpımı ve dual matrislerin özellikleri," yük. lis. tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, 2013.
- [37] L. Qi Z. Luo, "Eigenvalues and Singular Values of Dual Quaternion Matrices," *Pac. J. Optim.*, c. 19, ss. 257–272, 2023.
- [38] B. Belzile J. Angeles, "Reflections over the Dual Ring–Applications to Kinematic Synthesis," *Journal of Mechanical Design*, c. 141, no. 7, s. 072 302, 2019. doi: 10 . 1115/1 . 4043204.
- [39] Y.-L. Gu J. Y. S. Luh, "Dual-Number Transformation and Its Applications to Robotics," *IEEE Journal on Robotics and Automation*, c. 3, no. 6, ss. 615–623, 1987. doi: 10 . 1109/JRA . 1987 . 1087138.
- [40] E. Pennestri P. P. Valentini, "Linear Dual Algebra Algorithms and Their Application to Kinematics," içinde *Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications*, J. G. de Jalon E. Bayo, ed., Dordrecht: Springer, 2009, ss. 207–229. doi: 10 . 1007/978-1-4020-8829-2_11.
- [41] C. Cui, L. Qi, G. Song Q.-W. Wang, "Moore determinant of dual quaternion Hermitian matrices," *Comput. Appl. Math.*, c. 43, s. 365, 2024. doi: 10 . 1007/s40314-024-02884-3.
- [42] R. Gutin, "Generalizations of singular value decomposition to dual-numbered matrices," *Linear and Multilinear Algebra*, c. 70, no. 20, ss. 5107–5114, 2022. doi: 10 . 1080/03081087 . 2021 . 1903830.
- [43] E. Minguzzi, "The Theory of Screws Derived from a Module over the Dual Numbers," *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, c. 203, no. 6, ss. 2613–2639, 2024. doi: 10 . 1007/s10231-024-01458-8.
- [44] F. E. Udwardia, "Dual Generalized Inverses and Their Use in Solving Systems of Linear Dual Equations," *Mechanism and Machine Theory*, c. 156, s. 104 158, 2021. doi: 10 . 1016/j . mecmachtheory . 2020 . 104158.

- [45] J. Fike J. Alonso, “The Development of Hyper-Dual Numbers for Exact Second-Derivative Calculations,” *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Orlando, FL, USA: AIAA, 2011, AIAA 2011–886. doi: 10 . 2514 / 6 . 2011–886.
- [46] J. A. Fike J. J. Alonso, “Automatic Differentiation through the Use of Hyper-Dual Numbers for Second Derivatives,” içinde *Recent Advances in Algorithmic Differentiation*, U. Naumann O. Schenk, ed., Berlin, Heidelberg: Springer, 2012, ss. 163–173. doi: 10 . 1007/978–3–642–30023–3_15.
- [47] J. A. Fike, “Multi-Objective Optimization Using Hyper-Dual Numbers,” dok. tezi, Stanford University, Stanford, CA, 2013.
- [48] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd. New York: McGraw-Hill, 1976.
- [49] W. R. Hamilton, “On a New Species of Imaginary Quantities, Connected with the Theory of Quaternions,” *Proceedings of the Royal Irish Academy*, c. 2, Royal Irish Academy, 1840, ss. 424–434.
- [50] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*. London: Longmans, Green, & Company, 1866.
- [51] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*. Dublin: Hodges ve Smith, 1853.
- [52] J. Fike, S. Jongsma, J. Alonso E. Van Der Weide, “Optimization with Gradient and Hessian Information Calculated Using Hyper-Dual Numbers,” *29th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Honolulu, HI, USA: AIAA, 2011, AIAA 2011–3807. doi: 10 . 2514/6 . 2011–3807.
- [53] A. Cohen M. Shoham, “Application of Hyper-Dual Numbers to Multibody Kinematics,” *J. Mech. Robot.*, c. 8, no. 1, s. 011 015, 2016. doi: 10 . 1115/1 . 4030588.
- [54] A. Cohen M. Shoham, “Application of Hyper-Dual Numbers to Rigid Bodies Equations of Motion,” *Mechanism and Machine Theory*, c. 111, ss. 76–84, 2017. doi: 10 . 1016/j . mechmachtheory . 2017 . 01 . 013.
- [55] A. Cohen M. Shoham, “Principle of Transference—An Extension to Hyper-Dual Numbers,” *Mechanism and Machine Theory*, c. 125, ss. 101–110, 2018. doi: 10 . 1016/j . mechmachtheory . 2017 . 12 . 007.
- [56] J. E. Kim, “A Hyper-Dual Number Approach to Higher-Order Derivative Computation,” *Axioms*, c. 14, no. 8, s. 641, 2025. doi: 10 . 3390 / axioms14080641.
- [57] S. B. Park J. E. Kim, “Hyper–Dual Numbers: A Theoretical Foundation for Exact Second Derivatives,” *Mathematics*, c. 13, no. 24, s. 3909, 2025. doi: 10 . 3390/math13243909.
- [58] M. Tanaka, T. Sasagawa, R. Omote, M. Fujikawa, D. Balzani J. Schröder, “A highly accurate 1st- and 2nd-order differentiation scheme for hyperelastic material models based on hyper-dual numbers,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, c. 283, ss. 22–45, 2015. doi: 10 . 1016 / j . cma . 2014 . 08 . 020.

- [59] M. Tanaka, D. Balzani J. Schröder, “Implementation of incremental variational formulations based on the numerical calculation of derivatives using hyper dual numbers,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, c. 301, ss. 216–241, 2016. doi: 10.1016/j.cma.2015.12.010.
- [60] F. Fujii, M. Tanaka, T. Sasagawa R. Omote, “Computational two-mode asymptotic bifurcation theory combined with hyper dual numbers and applied to plate/shell buckling,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, c. 325, ss. 666–688, 2017. doi: 10.1016/j.cma.2017.06.028.
- [61] Y. Imoto, N. Yamanaka, T. Uramoto, M. Tanaka, M. Fujikawa N. Mitsume, “Fundamental theorem of matrix representations of hyper-dual numbers for computing higher-order derivatives,” *JSIAM Lett.*, c. 12, ss. 29–32, 2020.
- [62] S. Aslan, “Kinematic applications of hyper-dual numbers,” *Int. Electron. J. Geom.*, c. 14, no. 2, ss. 292–304, 2021. doi: 10.36890/iejg.888373.
- [63] G. Yüca Y. Yaylı, “Hyper-dual matrices and dual transformations,” *Journal of Geometry and Physics*, c. 175, s. 104473, 2022. doi: 10.1016/j.geomphys.2022.104473.
- [64] Ç. Ramis, Y. Yaylı İ. Zengin, “The Application of Euler-Rodrigues Formula over Hyper-Dual Matrices,” *International Electronic Journal of Geometry*, c. 15, no. 2, ss. 266–276, 2022. doi: 10.36890/iejg.1127216.
- [65] F. Çil, “Hiper Dual Sayılar ve Özellikleri,” yük. lis. tezi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Rize, 2020.
- [66] Ö. Bektaş H. Çakır, “Hyper Dual Number Matrices,” *Maejo Int. J. Sci. Technol.*, c. 17, no. 3, ss. 187–200, 2023.
- [67] Q. Xiao J. Zhong, “Characterizations and properties of hyper-dual Moore–Penrose generalized inverse,” *Open Mathematics*, c. 16, no. 1, ss. 1502–1511, 2018. doi: 10.3934/math.20241670.
- [68] T. Verma, A. Kumar V. Shekhar, “Existence and characterizations of hyper-dual group inverse,” *arXiv*, 2025. doi: 10.48550/arXiv.2504.05264.
- [69] S. Yüce, *Sayılar ve Geometri*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık, 2020.
- [70] H. H. Hacısalihoğlu, *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.
- [71] S. Bandyopadhyay, “Analysis and Design of Spatial Manipulators: An Exact Algebraic Approach Using Dual Numbers and Symbolic Computation,” dok. tezi, Indian Institute of Science, Bangalore, India, 2006.
- [72] S. Yüce, *Sayılar ve Matrisler Teorisi*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık, 2023.
- [73] A. Cohen M. Shoham, “Hyper Dual Quaternions Representation of Rigid Body Kinematics,” *Mechanism and Machine Theory*, c. 150, s. 103861, 2020. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2020.103861.
- [74] S. Roman, *Advanced Linear Algebra* (Graduate Texts in Mathematics), 2nd. New York, NY: Springer, 2005. doi: 10.1007/0-387-27474-X.

- [75] J. Dattorro, *Convex Optimization and Euclidean Distance Geometry*. Meboo Publishing USA, 2005.
- [76] R. A. Horn C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [77] V. Majernik, “Quaternion formulation of the Galilean space–time transformation,” *Acta Physica Slovaca*, c. 56, 2006.
- [78] V. Majernik M. Nagy, “Quaternionic Form of Maxwell’s Equations with Sources,” *Lettere al Nuovo Cimento*, c. 16, no. 9, ss. 265–268, 1976.
- [79] Z. Ercan S. Yüce, “On Properties of the Dual Quaternions,” *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, c. 4, no. 2, ss. 142–146, 2011.
- [80] S. Yüce, *Lineer Cebir*, 8. bs. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık, 2025.
- [81] G. H. Golub C. F. V. Loan, *Matrix Computations*, 4th. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013.
- [82] P. Dursun N. Gürses, “Positive Integer Powers of Certain Dual Tridiagonal Matrices,” *İzmir Mathematics Days V*, September 27–29, 2023, İzmir, Türkiye: İzmir Democracy University, s. 7.
- [83] A. Öteleş M. Akbulak, “Positive Integer Powers of Certain Complex Tridiagonal Matrices,” *Appl. Math. Comput.*, c. 219, no. 21, ss. 10 448–10 455, 2013. doi: 10.1016/j.amc.2013.04.030.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. P. Dursun, N. Gürses, “A New Method for Examination of Eigenvalue–Eigenvector Theory for Hyperdual Number Matrices,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2026, doi: 10.1002/mma.70658.

Konferans Bildirisi

1. P. Dursun, N. Gürses, “A Novel Perspective on Eigenvalue–Eigenvector Theory of Hyperdual Number Matrices,” *Modern Problems of Mathematics and Mechanics*, Bakü, Azerbaycan, 3–6 Eylül 2025, ss. 27–29.
2. P. Dursun, N. Gürses, “Eigenvalues and Eigenvectors of a Certain Type of 3×3 Dual and Hyperdual Number Tridiagonal Matrices,” *9th International Hybrid Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA 2026)*, İstanbul, Türkiye, 6–8 Mayıs 2026, ss. 98.

Proje

1. N. Gürses (Yürütücü), P. Dursun (Araştırmacı), *Özel Katsayılı Matrisler*, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü (YTÜ-BAP), Proje No: FYL-2025-6862, 24.02.2025–24.08.2026.

Ödül

1. 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı (TÜBİTAK)