



**İSTANBUL TİCARET
ÜNİVERSİTESİ**

FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

**GREİNER VEKTÖR ALANLARINDA P-LAPLACE
DENKLEMLERİ VE HARDY TİPİ EŞİTSİZLİKLER**

Abdullah SALAMI

**Danışman
Doç. Dr. Abdullah YENER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL- 2022**

KABUL VE ONAY SAYFASI

Abdullah SALAMİ tarafından hazırlanan "**Greiner Vektör Alanlarında P–Laplace Denklemleri ve Hardy Tipi Eşitsizlikler**" adlı tez çalışması 11/11/2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **Doç. Dr. Abdullah YENER**
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. İsmail KÖMBE**
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. İbrahim KIRAT**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Onay Tarihi: 27.01.2023

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünün 27.01.2023 tarih ve 2023/373 numaralı Yönetim Kurulu Kararının 3. maddesi gereğince, ders yüklerini ve tez yükümlülüğünü yerine getirdiği belirlenen “Abdullah SALAMİ” adlı öğrencinin mezun olmasına oy birliği ile karar verilmiştir.

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Doğan KAYA

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

27.01.2023

Abdullah SALAMI

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	4
3. ÖN BİLGİLER.....	11
3.1. Fonksiyon Uzayları	11
3.2. Green Özdeşlikleri ve İntegrasyon Formülleri	13
3.3. Eşitsizlikler	16
4. GREİNER VEKTÖR ALANLARI.....	19
4.1. Temel Tanım Kavramlar	19
5. GREİNER VEKTÖR ALANLARINDA P-LAPLACE DENKLEMLERİ.....	25
5.1. Giriş	25
5.2. Pozitif Çözümün Yokluğu	26
6. GREİNER VEKTÖR ALANLARINDA HARDY TİPİ EŞİTSİZLİKLER VE BAZI UYGULAMALAR.....	34
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GREİNER VEKTÖR ALANLARINDA P- LAPLACE DENKLEMLERİ VE HARDY TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Abdullah SALAMI

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Abdullah YENER
2022, 43 sayfa

Bu tezin öncelikli amacı, Greiner vektör alanları üzerinde

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(w)|\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u) + V(w)u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega \end{cases}$$

şeklinde verilen p -Laplace probleminin pozitif çözümünün hangi koşullar altında mevcut olmadığına araştırılmasıdır. Burada, $1 < p < 2$, $0 < A(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $V(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ olup, ∇_k alt eliptik gradyan vektörü ve Ω ise Greiner vektör alanlarında pürüzsüz sınıra sahip sınırlı bir bölgedir.

Hardy eşitsizlikleri, tekil potansiyel kapsayan doğrusal veya doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerde pozitif çözümün varlığı veya yokluğunu göstermede mühim bir rol oynamaktadır. Bu tezin ikincil amacı, Greiner vektör alanlarında çeşitli ağırlıklı Hardy tipi eşitsizlikler elde etmektir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal olmayan problemler, Greiner vektör alanları, Hardy tipi eşitsizlikler, p -Laplace denklemleri, pozitif çözümün yokluğu, tekil potansiyel.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

P- LAPLACE EQUATIONS AND HARDY-TYPE INEQUALITIES ON GREINER VECTOR FIELDS

Abdullah SALAMİ

İstanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Doç. Dr. Abdullah YENER
2022, 43 pages

The primary aim of this thesis is to investigate the nonexistence of positive solutions to the following nonlinear degenerate parabolic equation involving p – Laplacian:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot \left(A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) + V(w) u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega, \end{cases}$$

where $1 < p < 2$, $0 < A(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ and $V(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$. Here, ∇_k is the subelliptic gradient and Ω is a bounded domain with smooth boundary in Greiner vector fields.

Hardy type inequalities play an important role in showing existence and nonexistence of positive solutions in linear and nonlinear partial differential equations involving singular potentials. The secondary aim of this thesis is to obtain various weighted Hardy type inequalities in Greiner vector fields.

Keywords: Greiner vector fields, Hardy type inequality, p – Laplace equations, non-existence of positive solution, singular potential, nonlinear problems.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren, dinamizmi, vizyonu, samimiyeti ve motivasyonu ile örnek olan, her zaman öğrencisi olmaktan ve kendisiyle çalışmaktan gurur duyduğum danışmanım hocam sayın Doç. Dr. Abdullah YENER'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Jüri üyelerim sayın Prof. Dr. İsmail Kömbe, Prof. Dr. İbrahim KIRAT 'e tez savunma komitemde olmayı kabul ettikleri, kıymetli vakitlerini ayırdıkları, faydalı yorumlar sağladıkları için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Akademik hayatımda adım attığımda tanıştığım ilk kişi olduğu için kendimi çok şanslı hissettiğim, bana olan inancı ve desteğini hiçbir zaman esirmeyen, bilim insanı kişiliği ve açık fikirliliğiyle bana rehberlik eden çok kıymetli sayın Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK ve Prof. Dr. Yusuf ZEREN, Öğr. Gör. Dr. Nida KIRÖMEROĞLU 'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Son olarak Tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Abdullah SALAMI
İSTANBUL, 2022

SİMGELER VE KISALTMALAR

$B(x_0, R)$	Öklid uzayında x_0 merkezli R yarıçaplı açık yuvar
$C(\Omega)$	Ω bölgesindeki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	Test fonksiyonları uzayı
$L^p(\Omega)$	Ω bölgesindeki p . kuvvetten integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$L_{loc}^p(\Omega)$	Ω bölgesindeki p yerel integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$J(\phi)$,	ϕ dönüşümünün Jakobiyesi
$Q = 2n + 2k$,	Greiner vektör alanlarında homojen boyut
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^n$	n – boyutlu Öklid uzayı
$W^{k,p}$	Sobolev uzayı
$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2ky_j z ^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l}$,	$Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2kx_j z ^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l}$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, Greiner vektör alanları
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$w = (z, l) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, l)$,	$\mathbb{R}^{2n+1}$ ’de bir nokta
∇	Öklid uzayında tanımlı gradyan vektörü
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$,	$\mathbb{R}^n$ ’de Laplace operatörü
$\nabla_k = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$,	Greiner vektör alanlarında gradyan vektörü
$\Delta_k = \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2)$,	Greiner vektör alanlarında Laplace operatörü

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklem, $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun

$$u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}, \dots$$

gibi sonlu sayıda kısmi türevlerini içeren bir bağıntıdır. Bir kısmi diferansiyel denklem en genel hali ile

$$F(x_1, \dots, x_n, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}, \dots) = 0$$

biçiminde yazılır. Kısmi diferansiyel denklemler merteye, lineerlik vb. özelliklere göre sınıflandırılırlar. Kısmi diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir. İkinci mertebeden iki değişkenli bir kısmi diferansiyel denklemin en genel hali, x ile y bağımsız değişken ve $u = u(x, y)$ olmak üzere,

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$$

olarak ifade edilir.

Kısmi diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun tüm kısmi türevlerine göre lineer ise denkleme lineer kısmi diferansiyel denklem denir. Mesela, 2. mertebeden iki değişkenli lineer kısmi diferansiyel denklem en genel haliyle

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} \\ + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y)$$

olarak gösterilir. Lineer kısmi diferansiyel denklemler haricindeki tüm denklemler lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem olarak isimlendirilir.

Kısmi diferansiyel denklemler parabolik, eliptik ve hiperbolik olmak üzere üç kısımda sınıflandırılır. Bu çalışmanın ana konusunu, doğrusal olmayan parabolik tipten denklemlerin en önemli temsilcilerinden olan

$$\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0$$

p – Laplace denklemi oluşturmaktadır.

Açıkça ifade etmek gerekirse tezin ilk kısmında ele alınan problem şu şekildedir:

$\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge, $1 < p < 2$, $0 < A(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $V(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u) + V(w) u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklinde verilen doğrusal olmayan p – dejenere parabolik probleminin pozitif çözümü hangi koşullar altında mevcut değildir?

Bu çalışmada, (1.1) probleminin pozitif çözümünün

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega (\varepsilon + A(w)) |\nabla_k \phi|^p dw - \int_\Omega V(w) |\phi|^p dw}{\int_\Omega |\phi|^p dw}$$

şeklinde verilen Rayleigh oranı ve p 'nin değerleriyle yakından ilgili olduğu gösterilmiştir.

Tezin devamında, Hardy eşitsizliklerinin tekil potansiyele sahip doğrusal ve doğrusal olmayan kısmı türevli problemlerdeki pozitif çözüm üzerindeki etkisinden bahsedilmiştir ve Greiner vektör alanlarında radyal olmayan ağırlık fonksiyonuna sahip

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 dw$$

ve

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log^2 \left(\frac{1}{x_1} \right)} \phi^2 dw - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log \left(\frac{1}{x_1} \right)} \phi^2 dw$$

Hardy eşitsizliklerinin herhangi $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için geçerli olduğu kanıtlanmıştır. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, sırasıyla, düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge ve $B_1(0) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ birim yuvarıdır.

Daha sonra, bu eşitsizliklerin doğrusal olmayan eliptik bir kısmı türevli problemde uygulamasına yer verilmiştir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Tezin bu kısmında Öklid uzayında ve Greiner vektör alanlarında tezin ana problemine motivasyon kaynağı olan çeşitli çalışmalar literatür özeti olarak ifade edilmiştir.

Son yıllarda tekil potansiyele sahip parabolik problemlerde pozitif çözümün olup olmadığı üzerine çokça çalışma yapılmıştır. Örneğin, Baras ve Goldstein (1984) tarafından yapılan önemli çalışmada Öklid uzayında tekil ters kare potansiyelini kapsayan doğrusal problemin pozitif çözümünün yokluğu için gerekli şartlar elde edilmiştir. Bu çalışma şu şekildedir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2} u, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.1)$$

Burada Ω sınırlı bir bölge ve $0 \in \Omega$ 'dır. Eğer $\lambda > \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ ise (2.1) probleminin

pozitif çözümü yoktur. Eğer $\lambda \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ ise (2.1) probleminin pozitif çözümü vardır.

Burada, $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ sabiti L^2 Hardy eşitsizliğindeki en iyi sabittir. Öklid uzayındaki L^2

Hardy eşitsizliği şöyledir: $n \geq 3$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi(x)|^2 dx \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|^2} dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Garcia Azorero ve Peral (1998) tarafından (2.1) problemi Öklid uzayında aşağıdaki biçimde genişletilmiş ve bu problemin pozitif çözümleri incelenmiştir. Bu problem,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u + \frac{\lambda}{|x|^p} u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklinde olup, burada $1 < p < 2$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de düzgün sınırı olan sınırlı

bir bölgedir. Eğer $\lambda > \left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ ise (2.2) probleminin pozitif çözümü yoktur. Eğer

$\lambda \leq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ ise (2.2) probleminin pozitif çözümleri vardır. Burada, $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ sabiti

L^p Hardy eşitsizliğindeki en iyi sabittir. Öklid uzayındaki L^p Hardy eşitsizliği şöyledir: $1 < p < n$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi(x)|^p dx \geq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^p} dx, \quad \forall \phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Daha sonra, Cabre ve Martel (1999) tarafından genel pozitif bir potansiyel fonksiyona sahip

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.3)$$

doğrusal Cauchy-Dirichlet problemi ele alınmıştır. Bu çalışmada, (2.3) probleminin pozitif çözümünün yokluğunun

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi(x)|^2 dx - \int_{\Omega} V(x) |\phi(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} |\phi(x)|^2 dx}$$

Rayleigh oranının büyüklüğü ile yakından ilgili olduğu gösterilmiştir.

Goldstein ve Kömbe (2003) ikilisi (2.3) problemi için uygulanan tekniği doğrusal olmayan problemlere taşımıştır. Bu çalışmada ele alınan problem şu şekildedir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u + V(x)u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.4)$$

Burada $1 < p < 2$, $V(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ düzgün sınırı olan sınırlı bir bölgedir. Bu problemin pozitif çözümünün yokluğunun normalize p -enerji formunun spektrumuna bağlı olduğu sonucuna varılmıştır.

Daha sonra, Goldstein vd. (2005) tarafından yukarıdaki problem genişletilmiş ve problemin pozitif çözümünün hangi şartlar altında olmadığı gösterilmiştir. Buna ilişkin problem aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|x|^{-\gamma p} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + V(x)u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.5)$$

Burada $1 < p < 2$, $V(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ düzgün sınırı olan sınırlı bir bölgedir.

Tüm bu çalışmalardan hareketle, $\mathbb{R}^n$ 'de ele alınan bu problemlerin Greiner vektör alanlarında bir karşılığı var mıdır? sorusu doğal olarak akla gelmektedir. Buna ilişkin ilk çalışma Kömbe (2005) tarafından yapılmıştır. Detaylıca ifade etmek gerekirse ele alınan çalışma şu şekildedir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (|\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u) + V(w)u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega, \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.6)$$

Burada, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge olmak üzere, (2.6) problemi için pozitif çözümün yokluğunun p 'nin değer aralığına ve spektruma bağlı olduğu Cabre ve Martel tekniğinden istifade edilerek Kömbe (2005) tarafından ispatlanmıştır.

Bu çalışmadan sonra, Greiner vektör alanlarında tekil potansiyelli parabolik problemlere olan ilgi daha da artmıştır. Örneğin, Ahmetolan (2008) yaptığı çalışmada aşağıdaki p -Laplace problemini ele almıştır:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^q}{\partial t} = \nabla_k \cdot (|\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u) + V(w, t)u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega, \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.7)$$

Burada, $1 < p < q+1$, $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $V(w, t) \in L^1_{loc}(\Omega \times (0, T))$ zamana bağlı bir tekil potansiyel fonksiyondur. Ayrıca u_0 fonksiyonu özdeş sıfır değildir.

Bu tezin ana problemi olan, aşağıdaki doğrusal olmayan parabolik problem için pozitif çözümlerin yokluğu Kömbe (2005) tarafından ele alınan yaklaşımla incelenmiştir. Yukarıdaki tüm çalışmalar ışığında bu tezde ele alınan problem şu şekildedir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot (A(w)|\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u) + V(w)u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega. \end{cases} \quad (2.8)$$

Burada $1 < p < 2$, $0 < A(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $V(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ olup, ∇_k alt eliptik gradyan vektörü ve Ω ise Greiner vektör alanlarında düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölgedir. K, Ω 'nın Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir alt kümesi olmak üzere, p – Laplace probleminin pozitif çözümünün yokluğunun

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus K)} \frac{\int_{\Omega} (\varepsilon + A(w)) |\nabla_k \phi|^p dw - \int_{\Omega} V(w) |\phi|^p dw}{\int_{\Omega} |\phi|^p dw}$$

Rayleigh oranının büyüklüğüne ve p 'nin değerine bağlı olduğu sonucuna varılmıştır.

Özellikle tekil potansiyele sahip doğrusal veya doğrusal olmayan bazı kısmi diferansiyel denklemlerdeki çözümlerin araştırılmasında, türev operatörleriyle ilgili olan eşitsizliklerin rolü oldukça önemlidir. Bu eşitsizliklerin en önemli temsilcilerinden biri olan Hardy eşitsizliği Greiner vektör alanlarında şu şekilde verilir: $1 < p < Q$ ve $\phi \in C_0^\infty(\square^{2n+1} \setminus \{0\})$ olmak üzere,

$$\int_{\square^{2n+1}} |\nabla_k \phi|^p dw \geq \left(\frac{Q-p}{p} \right)^p \int_{\square^{2n+1}} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{p(2k-1)} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dw \quad (2.9)$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang ve Niu, 2003). Burada $Q = 2n + 2k$ sabiti Δ_k için homojen boyuttur. Ayrıca, $k \geq 1$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2ky_j |z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l} \quad \text{ve} \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2kx_j |z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l}$$

Greiner vektör alanları, $\nabla_k = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ gradyan vektörü ve

$\Delta_k = \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2)$ şeklinde tanımlanan Laplace operatör, $z = (x, y) \in \square^{2n}$, $l \in \square$ ve

$|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$ 'dir.

Daha sonra, Niu vd. (2010), (2.9) eşitsizliğinin ağırlıklı bir versiyonunu elde etmek için p -dejenere alt-eliptik $\Delta_{k,p}u = \nabla_k \cdot \left(|\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right)$ operatörünün temel çözümünü kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir:

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \rho^{\alpha p} |\nabla_k \phi|^p dw \geq \left| \frac{Q + \alpha p - p}{p} \right|^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \rho^{\alpha p} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{p(2k-1)} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dw. \quad (2.10)$$

Burada $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\})$, $Q \geq 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q \neq p$ ve $Q + \alpha p - p > 0$ 'dır. Ayrıca,

(2.10) eşitsizliğindeki $\left| \frac{Q - \alpha p - p}{p} \right|^p$ sabiti en iyi sabittir.

Sonrasında Lian (2013), herhangi $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ fonksiyonu için, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $1 < p < Q - \alpha$ ve $\beta + 2n + (p-1)(2k-1) > 0$ olması şartıyla,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{|z|^\beta}{\rho^{\alpha+\beta}} |\nabla_k \phi|^p dw \geq \left(\frac{Q - p - \alpha}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \frac{|z|^\beta}{\rho^{\alpha+\beta}} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{p(2k-1)} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dw$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca, buradaki $\left(\frac{Q - p - \alpha}{p} \right)^p$ sabitinin en iyi sabit olduğunu göstermiştir.

Yakın zamanda, Ahmetolan ve Kömbe (2016) Greiner vektör alanları ile ilişkili iki ağırlıklı keskin bazı Hardy tipi eşitsizlikler elde etmiştir.

Bu tezde, yukarıdaki çalışmalardan motive olarak, Greiner vektör alanlarında radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 dw$$

ve

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log^2 \left(\frac{1}{x_1} \right)} \phi^2 dw - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log \left(\frac{1}{x_1} \right)} \phi^2 dw$$

Hardy tipi eşitsizliklerin herhangi $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için geçerli olduğu gösterilmiştir. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, sırasıyla, düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge ve $B_1(0) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ birim yuvardır. Daha sonra, bu eşitsizliklerin doğrusal olmayan eliptik bir kısmı türevli problemde uygulamasına yer verilmiştir.

3. ÖN BİLGİLER

Şimdi, tezin farklı bölümlerinde isimleri sıklıkla geçen Öklid uzayındaki bazı temel teorem, tanım, fonksiyon uzayları ve eşitsizlikler verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Adams, 1975; Evans, 2002; Balinsky, 2015) kaynaklarına bakılabilir.

3.1. Fonksiyon Uzayları

$\square^n$, n -boyutlu Öklid uzayı ve Ω bu uzayda tanımlı basit bağlantılı açık bir küme olsun. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ negatif olmayan α_i tamsayılarının n bileşenlisi ise α 'ya çoklu indis denir.

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \square^n$ ise bu durumda $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ olur. $1 \leq i \leq n$ için

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ ise } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \partial^{\alpha_3} x_3 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

olarak ifade edilir ve bu $|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Özel olarak,

bir $u : \Omega \subset \square^n \rightarrow \square$ fonksiyonunun gradyanı $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ ile, Laplasyeni ise

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Negatif olmayan herhangi bir k tamsayısı için Ω bölgesinde $|\alpha| \leq k$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha u$ kısmi türevleri var ve sürekli olan fonksiyonların uzayı $C^k(\Omega)$ ile gösterilir. $C^\infty(\Omega)$ ise Ω bölgesindeki her mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayıdır. Bir $u : \Omega \rightarrow \square$ fonksiyonunun desteği şöyle verilir:

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

Eğer $\text{supp } u$ alt kümesi kompakt ise u fonksiyonunun kompakt desteğe sahip olduğu söylenir. Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ sınıflarına ait fonksiyonların oluşturduğu uzaylar sırasıyla $C_0(\Omega)$ ve $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına test fonksiyonu adı verilir.

Tanım 3.1. $\Omega, \mathbb{R}^n$ ’de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye p . kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. Bu sınıf $L^p(\Omega)$ ile gösterilir.

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile $L^p(\Omega)$ bir Banach uzayıdır (Evans, 2002).

Tanım 3.2. $\Omega, \mathbb{R}^n$ ’de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Ω ’nın her K kompakt alt kümesi için

$$L_{loc}^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \left(\int_K |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

şeklinde verilen kümeye p –yerel integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir (Evans, 2002).

Tanım 3.3. α çoklu indis, $\Omega, \mathbb{R}^n$ ’de bir bölge, $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ olsun. Eğer her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ test fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx$$

eşitliğini gerçekleyen bir $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu var ise v 'ye u 'nun α . mertebeden zayıf türevi denir ve $v = D^{\alpha}u$ şeklinde gösterilir (Evans, 2002).

Tanım 3.4. $\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ ve k negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun.

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

ile tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir (Evans, 2002).

3.2. Green Özdeşlikleri ve İntegrasyon Formülleri

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık, sınırlı bir küme ve $k = 1, 2, \dots$ olsun. $B(x_0, R)$, x_0 merkezli R yarıçaplı bir yuvar olsun ve eğer her bir $x_0 \in \partial\Omega$ için

$$\Omega \cap B(x_0, R) = \{x \in B(x_0, R) : x_0 > u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$$

olacak şekilde bir R sayısı ve C^k sınıfından bir $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa $\partial\Omega$ sınırı C^k sınıfından, her bir $k \in \mathbb{N}$ değeri için $\partial\Omega$ sınırı C^k sınıfına ait ise C^{∞} sınıfındandır denir. Eğer $\partial\Omega$ sınırı, C^1 sınıfından ise bu sınırın dış yönlü birim normal vektörü $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_i, \dots, \eta_n)$ olarak tanımlıdır. $u \in C^1(\Omega)$ olmak üzere, $\eta \cdot \nabla u$ ifadesine u 'nun dış yönlü normal türevi denir ve $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ile gösterilir. Ek olarak, $\partial\Omega$ sınırının yüzey alan diferansiyeli dS ile gösterilir.

Teorem 3.5. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir bölge, $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfına ait olsun. $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ise $i=1,2,\dots,n$ için

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \eta_i dS$$

olur (Evans, 2002).

Teorem 3.6. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bölge ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfına ait olsun. Bu durumda, her $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ vektör alanı için

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta dS$$

olur (Evans, 2002).

Teorem 3.7. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $\partial\Omega$ sınırı C^1 sınıfına ait olsun. $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ ise, $i=1,2,\dots,n$ için

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} uv \eta_i dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

olur (Evans, 2002).

p-Laplace Denklemi: $1 < p < \infty$ ve $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0 \tag{3.1}$$

denkleminde p -Laplace denklemi, bu denklemi sağlayan u fonksiyonuna ise p -harmonik fonksiyon denir. $p = \infty$ olduğunda bu denklem şu şekilde

$$\Delta_{\infty} u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \nabla u \cdot \nabla (|\nabla u|^2) = 0$$

ifade edilir. Eğer $p=1$ ise denklem

$$\Delta_1 u = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0$$

halini alır. $p=2$ durumunda bu denklem $\Delta u = 0$ Laplace denklemine indirgenir. $\nabla u = 0$ kritik noktalarında (3.1) denklemi, $p > 2$ için dejenere, $p < 2$ için ise tekil bir denklemdir. p –Laplace ve p –harmonik denklemleri arasındaki ilişki şu biçimde gösterilir:

$$\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |\nabla u|^{p-4} \left\{ |\nabla u|^2 \Delta u + (p-2) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\} = 0.$$

Bu eşitlik $(p-2)|\nabla u|^{p-4}$ ile bölündükten sonra elde edilen

$$\frac{|\nabla u|^2 \Delta u}{(p-2)} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

ifadesinde $p \rightarrow \infty$ için limit alındığında ∞ –Laplace denklemi elde edilir.

p –Laplace denkleminin $\square^n$ ’deki en basit çözümü $i=1,2,\dots,n$ için $u(x) = x_i$ şeklindedir. Diğer yandan, a ve b birer sabit olmak üzere, u bir çözüm ise $a + bu$ fonksiyonu da bir çözüm olur. $1 < p \leq \infty$ olmak üzere, p –Laplace denkleminin $\square^n \setminus \{0\}$ ’deki temel çözümü

$$u_p(x) = \begin{cases} -\ln|x|, & p = n, \\ |x|, & p = \infty, \\ |x|^{\frac{p-n}{p-1}}, & p \neq n \end{cases}$$

şeklindedir.

3.3. Eşitsizlikler

Bu kısımda tezde çokça istifade edilen bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Teorem 3.8. $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

eşitsizliği sağlanır (Evans, 2002).

Tanım 3.9. Eğer her $a, b \in \mathbb{R}^n$ ve her $t \in [0, 1]$ için

$$u((1-t)a + tb) \geq (1-t)u(a) + tu(b)$$

ise $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

Teorem 3.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık ve sınırlı bir bölge, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konkav bir fonksiyon olsun. O zaman

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \, dx\right) \geq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u) \, dx$$

olur. Bu eşitsizliğe konkav fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği denir (Evans, 2002).

Teorem 3.11. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\phi \in L^p(\Omega)$, $\psi \in L^q(\Omega)$ olsun.

Bu durumda, $\phi\psi \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega} |\phi\psi| dx \leq \left(\int_{\Omega} |\phi|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |\psi|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir. $p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy- Schwarz eşitsizliği adı verilir (Evans, 2002).

Teorem 3.12. $1 < p < n$ olmak üzere, her $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \geq \left(\frac{n-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi|^p}{|x|^p} dx$$

olur. Ayrıca $\left(\frac{n-p}{p} \right)^p$ pozitif sabiti en iyi sabittir (Azorero ve Alonso, 1998).

Teorem 3.13. $1 \leq p < n$ ve $q = \frac{pn}{n-p}$ olsun. O halde, herhangi $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

fonksiyonu için

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^q dx \right)^{1/q} \leq C_{p,n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \right)^{1/p}$$

eşitsizliğini gerçekleyen pozitif bir $C_{p,n}$ sayısı vardır. Bu eşitsizliğe, Gagliardo–Nirenberg–Sobolev eşitsizliği denir (Evans, 2002).

Teorem 3.14. $p > 1$ ve $s_1 \neq s_2$ pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$s_1^p - s_2^p - ps_2^{p-1}(s_1 - s_2) > 0$$

eşitsizliği geçerlidir.

Not. Bu eşitsizlik

$$(p-1)s_2^p - ps_2^{p-1}s_1 > -s_1^p$$

şeklinde de yazılabilir.

4. GREİNER VEKTÖR ALANLARI

4.1. Temel Tanım Kavramlar

$\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayında herhangi bir w noktası, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$w = (z, l) = (x, y, l) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (4.1)$$

şeklinde verilir. w noktasının orijine uzaklığı

$$\rho = \rho(w) = \left(|z|^{4k} + l^2 \right)^{1/4k}$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayında vektör alanları, $k \geq 1$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2ky_j |z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2kx_j |z|^{2k-2} \frac{\partial}{\partial l} \quad (4.2)$$

şeklindedir (Greiner, 1979). Burada, $|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2}$ ve $l \in \mathbb{R}$ 'dir.

Greiner vektör alanlarında gradyan operatörü

$$\nabla_k = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) \quad (4.3)$$

şeklinde verilir. Verilen gradyan vektörü, $\mathbb{R}^{2n+1}$ 'deki her nokta için $2n$ boyutlu bir vektör alanı oluşturur. $\mathbb{R}^{2n+1}$ 'deki alt-Laplace operatör ise

$$\Delta_k = \nabla_k \cdot \nabla_k = \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2) \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır. (4.4) ile verilen operatör literatürde Greiner operatörü olarak adlandırılır. $k=1$ olması durumunda Δ_k operatörü Heisenberg grubundaki alt-Laplace operatöre indirgenir.

$u: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $p > 1$ olsun. $\mathbb{R}^{2n+1}$ 'deki p -alt-Laplace ve p -biharmonik operatörler sırasıyla

$$\begin{aligned} \Delta_{k,p} u &= \nabla_k \cdot \left(|\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) \\ &= \left(\left[\sum_{j=1}^n X_j \left((X_j u)^2 + (Y_j u)^2 \right) \right]^{\frac{p-2}{p}} X_j u \right) + \left(\left[\sum_{j=1}^n Y_j \left((X_j u)^2 + (Y_j u)^2 \right) \right]^{\frac{p-2}{p}} Y_j u \right) \end{aligned}$$

ve

$$\Delta_{k,p}^2 u = \Delta_k \left(|\Delta_k u|^{p-2} \Delta_k u \right)$$

şeklindedir. Greiner vektör alanlarında p -Laplace denkleminin temel çözümü

$$u_p = \begin{cases} \rho^{\frac{(p-Q)}{(p-1)}}, & \text{eğer } p = Q, \\ -\ln \rho, & \text{eğer } p \neq Q, \end{cases}$$

şeklindedir. $w \neq 0$ için u_p fonksiyonu, $\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ üzerinde, p -harmoniktir. Yani, $-\Delta_{k,p} u_p = 0$ denklemi $\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ üzerinde sağlanır (Zhang vd., 2003).

Şimdi diferansiyel bir özdeşlik ispatı ile verilecektir.

Önerme 4.1. Türevlenebilir $u: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu radyal bir fonksiyon, yani sadece ρ değişkenine bağlı olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $w \in (\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\})$ için

$$|\nabla_k u(\rho)|^2 = \left(\frac{|z|^{2k-1}}{\rho^{2k-1}} u'(\rho) \right)^2 \quad (4.5)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\mathbb{R}^{2n+1}$ 'de gerekli türev işlemleri ile her $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$X_j u(\rho) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} + 2ky_j |z|^{2k-2} \frac{\partial \rho}{\partial l} \right) u'(\rho), \quad (4.6)$$

$$Y_j u(\rho) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} - 2kx_j |z|^{2k-2} \frac{\partial \rho}{\partial l} \right) u'(\rho) \quad (4.7)$$

olur. Buradan hareketle gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \rho = \left(|z|^{4k} + l^2 \right)^{\frac{1}{4k}-1} |z|^{4k-1} \frac{x_j}{|z|} = \frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} x_j, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \rho = \left(|z|^{4k} + l^2 \right)^{\frac{1}{4k}-1} |z|^{4k-1} \frac{y_j}{|z|} = \frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} y_j \quad (4.9)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial l} \rho = \left(|z|^{4k} + l^2 \right)^{\frac{1}{4k}-1} |z|^{4k-1} 2l = \frac{l}{2k \rho^{4k-1}} \quad (4.10)$$

kısmi türevleri elde edilir. (4.8), (4.9) ve (4.10)'daki kısmi türevler (4.6) ve (4.7) eşitliğinde yerlerine yazıldığında

$$X_j u(\rho) = \left(\frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} x_j + 2k \frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} y_j \right) u'(\rho)$$

ve

$$Y_j u(\rho) = \left(\frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} y_j - 2k \frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} x_j \right) u'(\rho)$$

eşitlikleri bulunur. Sonuç olarak ifade edilen

$$\begin{aligned} |\nabla_k u(\rho)|^2 &= \sum_{j=1}^n \left((X_j(u(\rho)))^2 + (Y_j(u(\rho)))^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\left| \frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} x_j + 2k \frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} y_j \right|^2 + \left| \frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} y_j - 2k \frac{z^{4k-2}}{\rho^{4k-1}} x_j \right|^2 \right) (u'(\rho))^2 \\ &= \left(\frac{z^{8k-4}}{\rho^{8k-4}} \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2) + \frac{z^{4k-2} l^2}{\rho^{8k-1}} \sum_{j=1}^n (x_j^2 + y_j^2) \right) (u'(\rho))^2 \\ &= \left(\frac{z^{2k-1}}{\rho^{2k-1}} u'(\rho) \right)^2 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

$R > 0$ için ρ -açık yuvarı $B_R = \{w \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \rho < R\}$ şeklinde ve ρ -küresi

$\partial B_R = \{w \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \rho(w) = R\}$ olarak verilir. $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$ için $D = B_{R_2} \setminus \bar{B}_{R_1}$

ve $\phi \in L^1(D)$ olsun. Amacımız, verilen bir D halkası üzerinde, $\int_D \phi(w) dw$

integralini hesaplamaktır. D halkası üzerindeki herhangi

$$w = (z, l) = (x, y, l) := \phi(\rho, \theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n-1})$$

noktasının küresel koordinatlardaki gösterimi

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho (\sin \theta)^{\frac{1}{2k}} \cos \theta_1, \\
y_1 &= \rho (\sin \theta)^{\frac{1}{2k}} \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\
x_2 &= \rho (\sin \theta)^{\frac{1}{2k}} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\
y_2 &= \rho (\sin \theta)^{\frac{1}{2k}} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4, \\
&\vdots \\
x_n &= \rho (\sin \theta)^{\frac{1}{2k}} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{2n-2} \cos \theta_{2n-1}, \\
y_n &= \rho (\sin \theta)^{\frac{1}{2k}} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{2n-2} \sin \theta_{2n-1}, \\
l &= \rho^{2k} \cos \theta
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\theta \in (0, \pi)$, $j = 1, 2, \dots, 2n-2$ için $\theta_j \in (0, \pi)$, $0 < \theta_{2n-1} < 2\pi$ ve $R_1 < \rho < R_2$ 'dir. Yukarıdaki tanımlanan dönüşüm operatörünün Jakobiye $J(\phi)$ ile gösterilir ve

$$|J(\phi)| = \rho^{Q-1} (\sin \theta)^{\frac{n-k}{k}} \sin^{2n-2} \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{2n-3} \sin \theta_{2n-2}$$

olarak hesaplanır. Bu nedenle hacim diferansiyeli aşağıdaki ilişkiyi karşılar:

$$dw = \rho^{Q-1} d\rho (\sin \theta)^{\frac{n-k}{k}} d\theta \sin^{2n-2} \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{2n-3} \sin \theta_{2n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{2n-2} d\theta_{2n-1}.$$

Burada $Q = 2n + 2k$ homojen boyuttur ve $p > 1$ için $|z|^p = \rho^p (\sin \theta)^{\frac{p}{2k}}$ olur. Eğer

$$u(w) = \frac{|z|^{p(2k-1)}}{\rho^{p(2k-1)}} v(\rho) = |\nabla_k \rho|^p v(\rho)$$

formunda ise

$$\begin{aligned}
\int_D u(w)dw &= \int_D |\nabla_k \rho|^p v(\rho)dw = \gamma_n \left(\int_0^\pi (\sin \theta)^{\frac{n-k}{k} + \frac{p(2k-1)}{2k}} d\theta \right) \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho^{Q-1} v(\rho) d\rho \right) \\
&= s_n \int_{R_1}^{R_2} \rho^{Q-1} v(\rho) d\rho
\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \sin^{2n-2} \theta_1 \dots \sin \theta_{2n-2} d\theta \dots d\theta_{2n-2} d\theta_{2n-1} \\
&= 2\pi \left(\int_0^\pi \sin^{2n-2} \theta_1 d\theta \right) \dots \left(\int_0^\pi \sin \theta_{2n-2} d\theta_{2n-2} \right)
\end{aligned}$$

$\square^{2n}$ ’deki birim Öklid küresinin Lebesgue ölçüsüdür ve

$$s_n := \gamma_n \left(\int_0^\pi (\sin \theta)^{\frac{n-k}{k} + \frac{p(2k-1)}{2k}} d\theta \right)$$

dir (Kömbe ve Yener, 2019).

5. GREİNER VEKTÖR ALANLARINDA P-LAPLACE DENKLEMLERİ

5.1. Giriş

Bu bölümde ilk olarak, doğrusal olmayan

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot \left(A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) + V(w) u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

parabolik probleminin incelenmesinde bize motivasyon veren bazı temel problemler verilecektir. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, $1 < p < 2$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $0 < A(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$ 'dir.

Ana probleme ilişkin ilk çalışma Kömbe (2005) tarafından yapılmıştır. Detaylıca ifade etmek gerekirse ele alınan çalışma şu şekildedir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot \left(|\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) + V(w) u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega, \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (5.2)$$

Burada, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olmak üzere, (5.2) problemi için pozitif çözümün yokluğunun p 'nin değer aralığına ve spektruma bağlı olduğu Cabre ve Martel tekniğinden istifade edilerek Kömbe (2005) tarafından ispatlanmıştır.

Bu çalışmadan sonra, Greiner vektör alanlarında tekil potansiyelli parabolik problemlere olan ilgi daha da artmıştır. Örneğin, Ahmetolan (2008) yaptığı çalışmada aşağıdaki p – Laplace problemini ele almıştır:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^q}{\partial t} = \nabla_k \cdot \left(|w|^{-p\gamma} |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) + V(w, t) u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega, \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (5.3)$$

Burada, $1 < p < q+1$, $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $V(w, t) \in L^1_{loc}(\Omega \times (0, T))$ zamana bağlı bir tekil potansiyel fonksiyondur. Ayrıca u_0 fonksiyonu özdeş sıfır değildir.

5.2. Pozitif Çözümün Yokluğu

Tanım 5.1. K 'nın dışında kalan, sürekli yerel pozitif çözümler aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

- (i) K , Ω bölgesinde Lebesgue ölçümü sıfır olan kapalı bir alt küme,
- (ii) $u : [0, T) \rightarrow L^1(\Omega)$ fonksiyonu $T > 0$ değerleri için sürekli,
- (iii) $(x, t) \rightarrow u(x, t) \in C((\Omega \setminus K) \times (0, T))$,
- (iv) $(\Omega \setminus K) \times (0, T)$ bölgesi üzerinde $u(x, t) > 0$,
- (v) $\lim_{t \rightarrow 0} u(., t) = u_0$,
- (vi) u , (5.1) denkleminin çözümü olmak üzere, $\nabla_k u \in L^p_{loc}(\Omega \setminus K)$.

Eğer u çözümü (i), (ii), (iii), (iv), (v) ve (vi) ifadelerini sağlıyorsa, K 'nın dışında kalan genelleştirilmiş pozitif çözüm denir. Eğer $K = \emptyset$ ise u çözümü genelleştirilmiş pozitif yerel çözüm olarak adlandırılır (Kömbe, 2005).

Öklid tipi L^p Sobolev eşitsizliği Greiner vektör alanlarındaki düzgün sınırlara sahip sınırlı bir Ω bölgesinde de geçerlidir (Capogna v.d., 1993; Lu, 1994). Bu eşitsizlik aşağıdaki formda verilebilir:

Teorem 5.2 (Sobolev Eşitsizliği) $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı bir bölge olmak üzere, $1 \leq p < Q$

ve $q = \frac{Qp}{Q-p}$ olsun. O halde, herhangi $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\left(\int_{\Omega} |\phi(w)|^q dw \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,Q} \left(\int_{\Omega} |\nabla_k \phi(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğini gerçekleyen pozitif bir $C_{p,Q}$ sayısı vardır (Capogna v.d., 1993; Lu, 1994).

Ana problemi vermeden önce, problemin ispatında kullanacak olan önemli bir eşitsizlik ispatı ile verilecektir. Bu teoremin ispatında Hölder ve Sobolev eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Yardımcı Teorem 5.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ sınırlı bir bölge olmak üzere, $1 \leq p < Q$ değeri için

$M \in L^{\frac{Q}{p}}(\Omega)$ ve $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ olsun. Bu takdirde, herhangi $\varepsilon \in (0,1)$ sayı için

$$\int_{\Omega} M(w) |\phi|^p dw \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla_k \phi(w)|^p dw + C(\varepsilon) \int_{\Omega} |\phi(w)|^p dw \quad (5.4)$$

eşitsizliğini gerçekleyen bir $C(\varepsilon) > 0$ sabiti vardır (Kömbe, 2005).

Kanıt. Hemen hemen her $w \in \Omega$ için $(M_n)_{n \geq 1}$ fonksiyon dizisi

$M_n(w) := \min \{M(w), n\}$ şeklinde tanımlansın. O halde,

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \|M_n - M\|_{L^{\frac{Q}{p}}} \rightarrow 0$$

olur ve buradan

$$\int_{\Omega} M |\phi|^p dw \leq \int_{\Omega} |M_n - M| |\phi|^p dw + n \int_{\Omega} |\phi|^p dw$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu görülür. Buradan, Hölder eşitsizliği yardımı ile

$$\int_{\Omega} M |\phi|^p dw \leq \left(\int_{\Omega} |M_n - M|^{\frac{Q}{p}} dw \right)^{\frac{p}{Q}} \left(\int_{\Omega} |\phi|^{\frac{Qp}{Q-p}} dw \right)^{\frac{(Q-p)}{Q}} + n \int_{\Omega} |\phi|^p dw \quad (5.5)$$

eşitsizliğine ulaşılır. $1 \leq p < Q$ ve $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için Greiner vektör alanlarındaki sınırlı Ω bölgesinde geçerli olan Sobolev eşitsizliği yardımı ile

$$\left(\int_{\Omega} |\phi|^{\frac{Qp}{Q-p}} dw \right)^{\frac{(Q-p)}{Q}} \leq C_{p,Q}^p \int_{\Omega} |\nabla_k \phi(w)|^p dw$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu pozitif bir $C_{p,Q}^p$ sabitinin olduğu görülür. Bu eşitsizlik (5.5) ifadesinde kullanırsa

$$\int_{\Omega} M |\phi|^p dw \leq C_{p,Q}^p \left(\int_{\Omega} |M_n - M|^{\frac{Q}{p}} dw \right)^{\frac{p}{Q}} \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^p dw + n \int_{\Omega} |\phi|^p dw$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n - M\|_{L^{\frac{Q}{p}}} = 0$$

olduğundan, verilen her $\varepsilon \in (0,1)$ değeri ve yeteri kadar büyük n sabiti için

$$\left(\int_{\Omega} |M_n - M|^{\frac{Q}{p}} dw \right)^{\frac{p}{Q}} \leq \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)C_{p,Q}^p}$$

eşitsizliği sağlanır. Böyle bir n sabiti için $C(\varepsilon) = n$ seçilirse beklenen (5.4) sonucu elde edilir. ■

Problem. $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge olsun. $0 < A(w) \in L_{loc}^1(\Omega)$ ve $V(w) \in L_{loc}^1(\Omega)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot \left(A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) + V(w) u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega \end{cases} \quad (5.6)$$

doğrusal olmayan parabolik probleminin pozitif çözümü hangi koşullar altında yoktur?

Teorem 5.4. $k \geq 1$ ve $Q = 2n + 2k$ olmak üzere $\frac{2Q}{Q+1} \leq p < 2$ olsun. Ayrıca K ,

düzgün sınırlara sahip sınırlı bir $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ bölgesinde Lebesgue ölçüsü sıfır olan kapalı bir alt küme olmak üzere, $0 < A(w) \in L^1_{loc}(\Omega \setminus K)$ ve $V(w) \in L^1_{loc}(\Omega \setminus K)$ olsun.

Eğer, bazı $\varepsilon > 0$ değerleri için

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus K)} \frac{\int_{\Omega} (\varepsilon + A(w)) |\nabla_k \phi|^p dw - \int_{\Omega} V(w) |\phi|^p dw}{\int_{\Omega} |\phi|^p dw} = -\infty$$

oluyorsa, (5.6) probleminin K 'nin dışında kalan genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü yoktur.

İspat. Teoremin ispatı olmayana ergi ispat yöntemi ile yapılacaktır. Herhangi $T > 0$ sayısı için $u: [0, T) \rightarrow L^1(\Omega)$ fonksiyonu $(\Omega \setminus K) \times (0, T)$ bölgesinde, $u_0 \geq 0$ olan ancak özdeş olarak $u \equiv 0$ olmayan, (5.6) probleminin pozitif bir çözümü olsun.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot \left(A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) + V(w) u^{p-1}$$

eşitliğinin her iki tarafı, $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus K)$ olmak üzere, $\frac{|\phi|^p}{u^{p-1}}$ test fonksiyonu ile

çarpıldıktan sonra $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ bölgesinde integre edilirse,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} dw = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^{2-p}}{2-p} |\phi|^p \right) dw = \frac{1}{2-p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{2-p} |\phi|^p dw$$

olduğundan,

$$\frac{1}{2-p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{2-p} |\phi|^p dw = \int_{\Omega} \nabla_k \cdot \left(A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) \frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} dw + \int_{\Omega} V(w) |\phi|^p dw \quad (5.7)$$

sonucu elde edilir. Bu eşitliğin sağındaki ilk integrale kısmi integrasyon uygulandığında integral aşağıdaki şekli alır:

$$L := \int_{\Omega} \nabla_k \cdot \left(A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) \left(\frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} \right) dw = - \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \cdot \nabla_k \left(\frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} \right) dw.$$

L ile ifade edilen integraldeki iç çarpım

$$|\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \cdot \nabla_k \left(\frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} \right) = p |\nabla_k u|^{p-2} \frac{|\phi|^{p-1}}{u^{p-1}} \nabla_k u \cdot \nabla_k |\phi| - (p-1) \frac{|\phi|^p}{u^p} |\nabla_k u|^p$$

olarak hesaplandığında

$$L = (p-1) \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k u|^p \frac{|\phi|^p}{u^p} dw - p \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \frac{|\phi|^{p-1}}{u^{p-1}} \nabla_k u \cdot \nabla_k |\phi| dw$$

eşitliği bulunur ve buradan Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımı ile

$$L \geq (p-1) \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k u|^p \frac{|\phi|^p}{u^p} dw - p \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k u|^{p-1} |\nabla_k \phi| \frac{|\phi|^{p-1}}{u^{p-1}} dw \quad (5.8)$$

sonucu elde edilir. $p > 1$ ve $s_1 \neq s_2$ pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$s_1^p - s_2^p - ps_2^{p-1}(s_1 - s_2) > 0$$

elementer eşitsizliğinin geçerli olduğu bilinmektedir. Bu eşitsizlik

$$(p-1)s_2^p - ps_2^{p-1}s_1 > -s_1^p$$

şeklinde yazıldıktan sonra $s_2 := A^{1/p}(w) \left| \frac{\phi}{u} \nabla_k u \right|$ ve $s_1 := A^{1/p}(w) |\nabla_k \phi|$ değerleri için uygulandığında

$$\begin{aligned} (p-1) \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k u|^p \frac{|\phi|^p}{u^p} dw - p \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k u|^{p-1} |\nabla_k \phi| \frac{|\phi|^{p-1}}{u^{p-1}} dw \\ > - \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k \phi|^p dw \end{aligned} \quad (5.9)$$

eşitsizliği elde edilir. (5.8) ve (5.9)'daki ifadeler birleştirilirse

$$L > - \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k \phi|^p dw \quad (5.10)$$

sonucu bulunur. (5.10) sonucunun (5.7) eşitliğinde kullanılmasıyla elde edilen

$$\frac{1}{2-p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{2-p} |\phi|^p dw > - \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k \phi|^p dw + \int_{\Omega} V(w) |\phi|^p dw$$

integral eşitsizliği, $0 < t_1 < t_2 < T$ olmak üzere, t değişkenine göre t_1 'den t_2 'ye kadar integre edilirse,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{2-p} |\phi|^p dw \right) dt = \int_{\Omega} (u^{2-p}(w, t_2) - u^{2-p}(w, t_1)) |\phi|^p dw$$

olduğundan,

$$\int_{\Omega} V(w) |\phi|^p dw - \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k \phi|^p dw < S \int_{\Omega} (u^{2-p}(w, t_2) - u^{2-p}(w, t_1)) |\phi|^p dw \quad (5.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $S := \frac{1}{(2-p)(t_2-t_1)}$ şeklindedir. $\frac{2Q}{Q+1} \leq p < 2$ olduğu

dikkate alınarak, $f(u) = u^{(2-p)Q/p}$ konkav fonksiyonu için Ω bölgesinde Jensen eşitsizliği uygulandığında

$$\int_{\Omega} \left(u^{2-p}(w, t_i) \right)^{Q/p} dw \leq C(|\Omega|) \left(\int_{\Omega} u(w, t_i) dw \right)^{((2-p)Q)/p}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, Ω bölgesi sınırlı olduğundan $|\Omega|$ sonludur. Ayrıca $u(w, t_i) \in L^1(\Omega)$ olduğu bilindiğinden,

$$C(|\Omega|) \left(\int_{\Omega} u(w, t_i) dw \right)^{((2-p)Q)/p} < \infty$$

olur ve dolayısıyla bu

$$u^{2-p}(w, t_i) \in L^{Q/p}(\Omega) \quad i=1, 2$$

demektir. Buradan da

$$\left(u^{2-p}(w, t_2) - u^{2-p}(w, t_1) \right) \in L^{Q/p}(\Omega)$$

sonucu elde edilir. Şimdi, $u^{2-p}(w, t_2) - u^{2-p}(w, t_1)$ fonksiyonu için Yardımcı Teorem 5.3 kullanılırsa; herhangi $0 < \varepsilon < 1$ sayısı için

$$S \int_{\Omega} \left(u^{2-p}(w, t_2) - u^{2-p}(w, t_1) \right) |\phi|^p dw \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^p dw + C(\varepsilon) \int_{\Omega} |\phi|^p dw$$

eşitsizliğinin sağlandığı pozitif bir $C(\varepsilon)$ reel sayısının olduğu görülür. Elde edilen bu son eşitsizlik (5.11) eşitsizliğinde kullanıldığında

$$\int_{\Omega} V(w) |\phi|^p dw - \int_{\Omega} A(w) |\nabla_k \phi|^p dw \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^p dw + C(\varepsilon) \int_{\Omega} |\phi|^p dw$$

ilişkisi ve dolayısıyla

$$\frac{\int_{\Omega} (\varepsilon + A(w)) |\nabla_k \phi|^p dw - \int_{\Omega} V(w) |\phi|^p dw}{\int_{\Omega} |\phi|^p dw} \geq -C(\varepsilon)$$

eşitsizliği bulunur. Burada $C(\varepsilon) > 0$ sonlu bir sayı olduğundan soldaki Rayleigh oranı alttan sınırlıdır ve dolayısıyla sonlu bir infimuma sahiptir. Buradan

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus K)} \frac{\int_{\Omega} (\varepsilon + A(w)) |\nabla_k \phi|^p dw - \int_{\Omega} V(w) |\phi|^p dw}{\int_{\Omega} |\phi|^p dw} \neq -\infty$$

sonucu elde edilir ve böylelikle ispat tamamlanır. Yani, (5.6) probleminin pozitif çözümü yoktur. ■

6. GREİNER VEKTÖR ALANLARINDA HARDY TİPİ EŞİTSİZLİKLER VE BAZI UYGULAMALAR

Bir fonksiyonun kendisi ile türevlerini kapsayan integral eşitsizlikleri; diferansiyel denklemler, harmonik analiz ve matematiğin benzer pek çok alanında farklı biçimlerde yıllardan beri karşımıza çıkmaktadır. Özellikle tekil potansiyele sahip doğrusal veya doğrusal olmayan bazı kısmi diferansiyel denklemlerdeki çözümlerin araştırılmasında türev operatörleriyle ilgili olan eşitsizliklerin rolü oldukça önemlidir.

Bu eşitsizliklerin en önemli temsilcilerinden biri olan Hardy eşitsizliği Greiner vektör alanlarında şu şekilde verilir: $1 < p < Q$ ve $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\})$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} |\nabla_k \phi|^p dw \geq \left(\frac{Q-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{p(2k-1)} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dw$$

eşitsizliği geçerlidir (Zhang ve Niu, 2003).

Tezin bu bölümünde radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip iki farklı Hardy eşitsizliği elde edilecek ve bu eşitsizliklerin biri için bir uygulama problemi verilecektir. Elde edilen ilk Hardy eşitsizliği şu şekildedir.

Teorem 6.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olmak üzere,

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 dw$$

eşitsizliği her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için sağlanır.

İspat. s bir reel sayı olmak üzere,

$$\left| \nabla_k \phi + s \frac{\nabla_k(x_1)}{x_1} \phi \right|^2 \geq 0$$

ifadesini ele alalım. Bu ifade

$$\left| \nabla_k \phi + s \frac{\nabla_k(x_1)}{x_1} \phi \right|^2 = |\nabla_k \phi|^2 + 2s \nabla_k \phi \cdot \left(\frac{\nabla_k(x_1)}{x_1} \phi \right) + \left| s \frac{\nabla_k(x_1)}{x_1} \phi \right|^2 \geq 0$$

şeklinde açılıp sağdaki eşitsizlik Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_{\Omega} \left[|\nabla_k \phi|^2 + 2s \nabla_k \phi \cdot \left(\frac{\nabla_k(x_1)}{x_1} \phi \right) + s^2 \frac{|\nabla_k(x_1)|^2}{x_1^2} \phi^2 \right] dw \geq 0 \quad (6.1)$$

olur. Bu ifadedeki ortadaki terime kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \nabla_k \phi \cdot \left(\frac{\nabla_k(x_1)}{x_1} \phi \right) dw &= \int_{\Omega} \nabla_k \phi^2 \cdot \left(\frac{\nabla_k(x_1)}{x_1} \right) dw \\ &= - \int_{\Omega} \phi^2 \nabla_k \cdot \left(\frac{\nabla_k(x_1)}{x_1} \right) dw \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 dw \end{aligned} \quad (6.2)$$

sonucu elde edilir. (6.1) ile (6.2) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde,

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw + s \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 dw + s^2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla_k(x_1)|^2}{x_1^2} \phi^2 dw \geq 0 \quad (6.3)$$

eşitsizliği bulunur. (6.3) ifadesinde $|\nabla_k(x_1)|^2 = 1$ olduğundan, bu eşitsizlik

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq -(s^2 + s) \int_{\Omega} \frac{1}{x^2} \phi^2 dw \quad (6.4)$$

şeklinde yazılabilir. (6.4) ifadesindeki $f(s) := -(s^2 + s)$ fonksiyonunun maksimum değeri $\frac{1}{4}$ olduğundan ispatlanmak istenen

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 dw$$

eşitsizliğine ulaşılır. ■

Teorem 6.2. $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log^2 \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw$$

eşitsizliği her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. s bir reel sayı olmak üzere,

$$\left| \nabla_k \phi + s \frac{\nabla_k \left(\log \frac{1}{x_1} \right)}{\log \frac{1}{x_1}} \phi \right|^2 \geq 0$$

ifadesini ele alalım. Bu ifade açılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_{\Omega} \left[|\nabla_k \phi|^2 + 2s \nabla_k \phi \cdot \left(\frac{\nabla_k \left(\log \frac{1}{x_1} \right)}{\log \frac{1}{x_1}} \phi \right) + s^2 \frac{\left| \nabla_k \left(\log \frac{1}{x_1} \right) \right|^2}{\log^2 \frac{1}{x_1}} \phi^2 \right] dw \geq 0 \quad (6.5)$$

integral eşitsizliği elde edilir. Kısmi integrasyon ve temel türev alma işlemleri ile

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} \nabla_k \phi \cdot \left(\frac{\nabla_k \left(\log \frac{1}{x_1} \right)}{\log \frac{1}{x_1}} \phi \right) dw &= \int_{\Omega} \nabla_k \phi^2 \cdot \left(\frac{\nabla_k \left(\log \frac{1}{x_1} \right)}{\log \frac{1}{x_1}} \right) dw \\ &= - \int_{\Omega} \phi^2 \nabla_k \cdot \left(\frac{\nabla_k \left(\log \frac{1}{x_1} \right)}{\log \frac{1}{x_1}} \right) dw \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log^2 \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw - \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw \end{aligned} \quad (6.6)$$

sonucuna ulaşılır. (6.5) ile (6.6) birlikte düşünüldüğünde

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw + s \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log^2 \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw - s \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw + s^2 \int_{\Omega} \frac{\left| \nabla_k \left(\log \frac{1}{x_1} \right) \right|^2}{\log^2 \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw \geq 0$$

ifadesi elde edilir.

$$\left| \nabla_k \left(\log \frac{1}{x_1} \right) \right|^2 = \frac{1}{x_1^2}$$

olduğundan, son eşitsizlikten

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq -\left(s + s^2\right) \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log^2 \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw + s \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikteki $f(s) := -(s + s^2)$ fonksiyonunun maksimum değerinin $\frac{1}{4}$ olduğu ve fonksiyonun bu değere $s = -\frac{1}{2}$ noktasında ulaştığı dikkate alındığında ispatlanmak istenen

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log^2 \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Şimdi Teorem 6.1'deki Hardy eşitsizliği için bir uygulama problemi verelim.

Sonuç 6.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge olmak üzere, $0 < V(w) \in L^1_{loc}(\Omega)$, $p > 0$ ve $\mu < \frac{1}{4}$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{cases} \Delta_k \phi + \mu \frac{1}{x_1^2} \phi = V(w) \phi^p, & \Omega, \\ \phi = 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (6.7)$$

doğrusal olmayan Dirichlet sınır değer probleminin pozitif ϕ çözümü yoktur.

İspat. Teoremin ispatı çelişki yöntemi ile verilecektir. Kabul edelim ki ϕ fonksiyonu (6.7) probleminin pozitif bir çözümü olsun.

$$\Delta_k \phi + \mu \frac{1}{x_1^2} \phi = V(w) \phi^p$$

denklemini ϕ fonksiyonu ile çarpılıp Ω bölgesinde integre edilirse

$$\int_{\Omega} \phi \Delta_k \phi \, dw = -\mu \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 \, dw + \int_{\Omega} V(w) \phi^{p+1} \, dw \quad (6.8)$$

eşitliği elde edilir. Kısmi integrasyon ile

$$\int_{\Omega} \phi \Delta_k \phi \, dw = \int_{\partial\Omega} \phi \nabla_k \phi \cdot \eta \, dS - \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 \, dw = - \int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 \, dw$$

olur ve Teorem 6.1'deki

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 \, dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 \, dw$$

Hardy eşitsizliği yardımı ile

$$\int_{\Omega} \phi \Delta_k \phi \, dw \leq -\frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} |\phi|^2 \, dw \quad (6.9)$$

sonucu elde edilir. Diğer taraftan, (6.8) eşitliği ile (6.9) eşitsizliği birleştirildiğinde

$$-\frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} |\phi|^2 \, dw \geq \int_{\Omega} \phi \Delta_k \phi \, dw = -\mu \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 \, dw + \int_{\Omega} V(w) \phi^{p+1} \, dw$$

ilişkisi ve dolayısıyla

$$\left(\mu - \frac{1}{4} \right) \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} |\phi|^2 \, dw \geq \int_{\Omega} V(w) \phi^{p+1} \, dw > 0$$

eşitsizliği elde edilir. $\mu < \frac{1}{4}$ olduğu dikkate alındığında son eşitsizliğin sol tarafı negatif olacağından çelişki elde edilir. Dolayısıyla varsayımımız yanlıştır. Verilen problemin pozitif çözümü yoktur. ■

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle, Greiner vektör alanlarında

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_k \cdot \left(A(w) |\nabla_k u|^{p-2} \nabla_k u \right) + V(w) u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(w, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ u(w, 0) = u_0(w) \geq 0, & \Omega \end{cases}$$

doğrusal olmayan p -Laplace probleminin pozitif çözümünün yokluğu incelenmiştir.

Daha sonra, radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarına sahip

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2} \phi^2 dw \quad (7.1)$$

ve

$$\int_{\Omega} |\nabla_k \phi|^2 dw \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log^2 \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{x_1^2 \log \frac{1}{x_1}} \phi^2 dw$$

Hardy eşitsizlikleri elde edilmiştir. Son olarak,

$$\begin{cases} \Delta_k \phi + \mu \frac{1}{x_1^2} \phi = V(w) \phi^p, & \Omega, \\ \phi = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

Dirichlet sınır değer probleminin uygun koşullar altında pozitif çözüme sahip olmadığı (7.1) ile gösterilen Hardy eşitsizliğinden faydalanılarak ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- Adams R. A., 1975. Sobolev Spaces. Academic Press, 320p, New York.
- Ahmetolan S., 2008. Nonlinear degenerate parabolic equations with singular coefficients for Greiner vector fields, *Applicable Analysis*, 87, 741–754.
- Ahmetolan S., Kombe I., 2016. Hardy and Rellich type inequalities with two weight functions, *Mathematical Inequalities & Applications*, 19(3), 937-948.
- Baras P., Goldstein J. A., 1984. The heat equation with a singular potential, *Transaction of the American Mathematical Society*, 284(1), 121–139.
- Beals R., Gaveau B., Greiner P., 1996. On a geometric formula for the fundamental solution of subelliptic laplacians, *Mathematische Nachrichten*, 181, 81–163.
- Beals R., Gaveau B., Greiner P., 1999. On a Green's functions for some highly degenerate elliptic operators, *Journal of Functional Analysis*, 165, 407 – 429.
- Cabré X., Martel Y., 1999. Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 329(11), 973–978.
- Capogna L., Danielli D., Garofalo N., 1993. An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations, *Communications in Partial Differential Equations*, 18(9-10), 1765–1794.
- Evans L. C., 2002. Partial differential equations, American Mathematical Society, Rhode, 749p, Island.
- Folland G. B., Stein E. M., 1982. Hardy spaces on homogeneous groups, Princeton University Press, Princeton.
- Garcia Azorero J. P., Peral Alonso I., 1998. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems, *Journal of Differential Equations*, 144(2), 441–476.
- Goldstein J. A., Zhang Q. S., 2001. On a degenerate heat equation with a singular potential, *Journal of Functional Analysis*, 186(2), 342–359.
- Goldstein G. R., Goldstein J. A., Kombe I., 2005. Nonlinear parabolic equations with singular coefficient and critical exponent, *Applicable Analysis*, 84(6), 571–583.
- Greiner P. C., 1979. A fundamental solution for a nonelliptic partial differential operator, *Canadian Journal of Mathematics*, 31(5), 1107–1120.

- Goldstein G. R., Goldstein J. A., Kombe I., 2003. Nonlinear degenerate parabolic equations with singular lower order term, *Advances in Differential Equations*, 8(10), 1153 –1192.
- Kombe I., 2004. The linear heat equation with highly oscillating potential, *proceedings of the American Mathematical Society*, 132(9), 2683 – 2691.
- Kombe I., 2005. Cauchy-Dirichlet problem for the nonlinear degenerate parabolic equations, *Abstract and Applied Analysis*, (6), 607 – 617.
- Kombe I., 2006. On the nonexistence of positive solutions to nonlinear degenerate parabolic equations with singular coefficients, *Applicable Analysis*, 85, 467 – 478.
- Kombe I., Yener A., 2019. A general approach to weighted L^p Rellich type inequalities related to Greiner operator, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 18(2), 869-886.
- Lian B., 2013. Some sharp Rellich type inequalities on nilpotent groups and application, *Acta Mathematica Scientia, Series B, English Edition*, 33(1), 59-74.
- Lu G., 1994. The sharp Poincaré inequality for free vector fields: an endpoint result, *Revista Mathematica Iberoamericana*, 10 (2), 453–466.
- Niu P., Ou, Y., Han J., 2010. Several Hardy-type inequalities with weights related to generalized Greiner operator, *Canadian Mathematical Bulletin*, 53, 153 – 162.
- Yener A., 2018. General weighted Hardy-type inequalities related to Greiner operators, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 48(7), 2405 – 2430.
- Zhang H., Niu P., 2003. Hardy-type inequalities and Pohozaev-type identities for a class of p -degenerate subelliptic operators and applications, *Nonlinear Analysis*, 54(1), 165-186.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Abdullah SALAMI

Eğitim Durumu

Lise : Sultan Gıyasettin Lisesi 2013

Lisans : Balkh Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Mesleki Deneyim

İstanbul Ticaret Üniversitesi 2021... devam ediyor

Yayınları

Salami A., Yener A., 2022, Nonexistence Results for the p-Laplace Equations Related with the Greiner Operator 5th International E-Conference On Mathematical Advances and Applications, 11-14 May, İstanbul, 29.