



**T.C. İSTANBUL T CARET
ÜNİVERSİTESİ**

FEN B LİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAŞLANGIÇ VE SINIR KOŞULLARINA SAÇIP BAZI L NEER
OLMAYAN KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
SİMETRİ ANALİZİ**

Gülistan İSKENDERO LU

**Danışman
Prof.Dr. Doğan KAYA**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL - 2020**

KABUL VE ONAY SAYFASI

Gülistan İSKENDEROĞLU tarafından hazırlanan "**Başlangıç ve Sınır Koşullarına Sahip Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler için Simetri Analiz**" adlı tez çalışması 13/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Prof. Dr. Doğan KAYA İstanbul Ticaret Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK İstanbul Ticaret Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. İsmail KÜÇÜK İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Murat SARI Yıldız Teknik Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Doç. Dr. Asif YOKUŞ Fırat Üniversitesi	

Onay Tarihi : 24 \07 \2020

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünün 24.07.2020 tarih ve 2020/288 numaralı Yönetim Kurulu Kararının 1. maddesi gereğince, ders yüklerini ve tez yükümlülüğünü yerine getirdiği belirlenen Gülistan İSKENDEROĞLU (TC: 51475866530) adlı öğrencinin mezun olmasına oy birliği ile karar verilmiştir.

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
Enstitü Müdürü

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/07/2020



Gülistan İSKENDEROĞLU

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	3
3. GRUP TEORİSİ	10
3.1. Simetri ve Grup Kavramları	10
3.2. Galileo ve Lorentz Grup Dönüşümleri	12
3.3. Lie Grup Dönüşümü	14
3.4. Korunum Kanunları	19
4. KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV	24
4.1. Kısmi Türev	24
4.2. Kesirli Mertebeden Türev	30
4.3. Kesirli Mertebeden Türev için Simetri Analizi	37
5. BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ	46
5.1. Başlangıç ve Sınır Değer Problemlerin Simetri Analizi	48
5.2. Başlangıç ve Sınır Değer Problem için Varlık ve Teklik Kavramı	51
6. RIEMANN-LIOUVILLE TÜREV İÇEREN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN LİE SİMETRİ ANALİZİ	57
6.1. Genelleştirilmiş Kesirli KdV Diferansiyel Denklem için Lie Grup Yöntemi	57
7. CAPUTO TÜREVİ İLE VERİLEN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLER İÇİN LİE SİMETRİ ANALİZİ	68
7.1. Caputo Türevli Harry-Dym Diferansiyel Denklem için Başlangıç ve Sınır Değer Problemi	68
7.2. Caputo Türevli Difüzyon Denklemi ve Kesirli Türevli 3. Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklem için Başlangıç ve Sınır Değer Problemi	71
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	83
KAYNAKLAR	85
ÖZGEÇMİŞ	89

ÖZET

Doktora Tezi

BAŞLANGIÇ VE SINIR KOŞULLARINA SAHİP BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SİMETRİ ANALİZİ

Gülistan İSKENDEROĞLU

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Doğan KAYA
2020, 90 sayfa

Bu doktora tezinde, lineer olmayan kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler ile modellenmiş problemlerin çözümüne odaklandık. Çalışma süresince, lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için klasik dönüşüm yöntemlerinin biri olan Lie grup (simetri) yöntemi ele alınarak bazı lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde ettik ve korunum kanunlarını inceledik. Ayrıca, Caputo türev operatörü içeren kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır değer problemleri için Lie grup teorisini oluşturduk. Bunun yanı sıra difüzyon olayının matematiksel modeli olan zaman-kesirli Harry-Dym denklemlerinin başlangıç sınır değer problemlerine Lie grup yöntemini uygulayarak, klasik dalga dönüşümü kullanmadan, bazı cebirsel formda olan analitik çözümler elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Caputo türevi, Lie simetri yöntemi, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç ve sınır değer problemi, Riemann-Liouville türevi.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SYMMETRY ANALYSIS FOR SOME NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INITIAL AND BOUNDARY CONDITIONS

Gülistan İSKENDEROĞLU

**Istanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Doğan KAYA
2020, 90 pages**

In this doctoral thesis, we focused on the solution of problems modeled by nonlinear fractional derivative partial differential equations. In the study process, we obtained the analytical solutions of some nonlinear fractional order differential equations by using the Lie group (symmetry) method, which is one of the methods of classical transformation methods to obtain solutions of linear and nonlinear partial differential equations, and also investigate conservation laws. Also, we created Lie group theory for the initial and boundary value problems of partial differential equations containing Caputo derivatives. Therewithal, by applying the Lie group method to the initial boundary value problems of the time-fractional Harry-Dym equations, which is the mathematical model of the diffusion event, we have obtained some analytical solutions algebraic form without using classical wave transformation.

Keywords: Caputo derivative, Initial and boundary value problems for nonlinear partial differential equations, Lie symmetry method, Riemann-Liouville derivative.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyerek destek olan danışman hocam sayın Prof. Dr. Doğan KAYA'ya, ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan Fen Bilimleri Enstitüsü müdürü sayın Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK'e, teknik destekleri için sayın Doç. Dr. Asif YOKUŞ'a, değerli görüş ve önerileri için sayın Prof. Dr. İsmail KÜÇÜK ve sayın Prof. Dr. Murat SARI'ya, iki yıl boyunca bölümde ofis sağlayıp, her türlü moral destek için başta sayın Dr. Öğr. Üyesi Muhammet CEYLAN olmak üzere Mekatronik Mühendisliği Bölümü öğretim elemanlarına sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, tezimi okuyup gereken düzeltmeleri yapmamda yardımcı olan sevgili doktora öğrencisi Sümeyye BAKİM'a şükranlarımı sunarım. Ve tabii ki desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve sürekli sabır gösteren sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Gülistan İSKENDEROĞLU
İSTANBUL, 2020

ŞEKİLLER

	Sayfa
Şekil 2.1. Karenin simetrileri.....	11
Şekil 2.2. Lorentz dönüşümü	13
Şekil 7.1. p negatif için çözüm	74
Şekil 7.2. q negatif için çözüm	79

ÇİZELGELER

	Sayfa
Çizelge 2.1. KdV denklemleri için Lie cebir çarpım tablosu.....	16

SİMGELER VE KISALTMALAR

KdV	Korteweg-de Vries
KmDD	Kesirli mertebeden diferansiyel denklem
KmKDD	Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem
loKDD	Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, doğrudan matematiğin bir konusu olmakla birlikte, uygulamada teknolojiye, ekonomiyeye, fizikten, mühendisliğin çeşitli alanlarına kadar pek çok yerde karşımıza çıkmaktadır. Yani, doğadaki birçok olay diferansiyel denklemler kullanılarak modellenenir. Bununla birlikte, dalga süreçlerini modellerken, genelde, matematiksel bir bakış açısından, daha karmaşık olan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler (kısaca loKDD'ler) ortaya çıkar. Diferansiyel denklemlerin, özellikle lineer olmayan denklemlerin çözümü ve analizi için yöntemlerin geliştirilmesi, fen bilimlerinin ve mühendisliğin en önemli konularından biridir. Bugüne kadar, tam çözümleri oluşturmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir, ancak bu yöntemler yeterli genelliğe sahip değillerdir.

Gardner ve arkadaşlarının (1967) çalışması önemli bir atılım olmuş ve lineer olmayan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ve Sturm-Liouville operatörleri arasında derin bir bağlantı bulunmuştur. Oluşturdukları ters saçılma yöntemi ile lineer olmayan denklemler, tam integral problemlerinin yardımı ile lineer problemlere indirgenmiş ve bu yöntemin oldukça verimli olduğu ortaya çıkmıştır. Görüldüğü gibi, ters saçılma yöntemi, lineer olmayan adi diferansiyel denklemler, loKDD, fark denklemleri, integro-diferansiyel denklemler ve diğer denklemlerin geniş sınıflarına uygulanabilir. Bu yöntemle birlikte uygulanan birçok önemli dönüşüm yöntemleri geliştirilmiştir. Onlardan bazıları: üstel fonksiyon yöntemi (Zhang, 2007), tanh-fonksiyonu yöntemi (Parkes ve Duffy, 1997; Uğurlu ve Kaya, 2008), Hirota'nın bilineer operatörleri (Hirota ve Satsuma, 1981), homojen denge yöntemi (Wang, 1995; Kaya, 1999), $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - genişleme yöntemi (Wang vd., 2008; Yokus, 2017), auto-Bäcklund dönüşüm yöntemi (Kaya vd., 2020; Yokus, 2020), $\left(\frac{1}{G'}\right)$ açılım yöntemi (Yokus ve Kaya, 2015) şeklindedir. Ancak dönüşüm yöntemleri arasında en genel olanlardan biri de simetri yöntemidir.

Simetri, bir anlamda uyum, düzen, kanun kavramlarıyla eşanlamlı olup, doğanın en temel özelliklerinden biridir. Tamamen geometrik bir kavramdan, doğa yasalarının altında yatan temel bir kavram haline gelmiştir. Bu kadar önemli bir kavram olan simetri, bilimsel bilginin neredeyse tüm alanlarına yansır. Görünen sadeliğine rağmen, simetri çalışması zor bir konudur, bu nedenle uzun süre teorik olarak sadece felsefi

bir kategori olarak incelenmiştir. Bununla birlikte, Klein ve Lie'nin (Klein, 1872; Lie, 1888) çalışmalarının etkisi altında, simetrinin her şeyden önce belirli cebirsel veya geometrik ilişkileri koruyan bir dizi işlem için birleştirici bir kavram olduğu anlaşılmıştır. Simetri, grup kavramı ile ayrılmaz bir şekilde bağlantılıdır. Bir yandan, bilinen doğa yasaları çerçevesinde karmaşık problemlerin çözümünde yardımcı bir rol oynarken diğer yandan, yeni olayların modellerinin oluşturulmasında temel bir araç görevi görür.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Yüz yıldan fazla bir süre önce, Norveçli matematikçi Sophus Lie (1842-1899) çalışmalarında sürekli dönüşüm gruplarını araştırmaya başlamıştır. Başlangıçta, bu tür yapılar, Galois teorisinde ifade edilen grup teorisinin cebirsel denklemlerin çözümünde başarıyla uygulanması, diferansiyel denklemler için bir tür Galois teorisi analogu oluşturma girişimi ile bağlantılı olarak ortaya çıkmıştır. Diferansiyel denklemler teorisindeki gruplar, cebirsel denklemler teorisinden biraz farklı bir yer olsa da, Lie tarafından başlatılan çalışmalar, şimdi matematiğin birçok alt alanı ile yakından bağlantılı olan Lie grupları teorisinin oluşturulmasına yol açmıştır. Bu yeni teorinin ana gücü kullanışlı, yani neredeyse tüm diferansiyel denklemler üzerinde uygulanabilir olması ve algoritmik olmasıdır. Keyfi yüksek mertebeli sistemler için lineerlik ve hiperbolik özelliklerinden bağımsız olarak çeşitli diferansiyel denklemlere başarıyla uygulanabilir. Temel gereksinim, denklemin simetri grubuna sahip olduğunun aşikar olmamasıdır. Bu gereksinim yapay değildir. Çoğunlukla gerçek hayat olayları için matematiksel modellerin simetri problemlerinin formülasyonu, modelin gerçekleştiği uzayın homojenliği ve izotropisi, fiziksel süreçlerin Galileo ve Lorentz değişmezliği gibi özelliklerinde gömülüdür.

Lie'den sonra bu yöntem birçok bilim insanı tarafından çalışılarak ileri aşamalara taşınmıştır. Lie grup yöntemini kullanarak, loKDD'nin tam çözümlerinin birçoğu elde edilebilir. Doğadaki fiziksel olayların çoğunluğu lineer olmayan model denklemlerin çözümünü araştırmaya dayanmaktadır. Ancak genel çözümü bulmanın daha zor olduğu kesirli türevli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ile de karşılaşılmaktadır.

loKDD'lerin tam çözümlerini elde edebilmek için genel bir teori olmaması, pek çok özel durum değişkenin uygun dönüşümlerinin kullanılmasına yol açmıştır (Drazin ve Johnson, 1989). Aslında, dönüşümler belki de bu alandaki mevcut en güçlü araçtır. Lie grup analizinin temel amacı, Lie simetri grubu olan, yani bu yöntem altında değişmeyen diferansiyel denklemleri, bağımlı ve bağımsız değişkenlere uygulanan dönüşümler altında diferansiyel denklemi değiştirmez bırakan sonsuz küçük üreteçleri bulmaktır. Daha sonra elde edilen her üretece karşılık gelen dönüşümü kullanarak diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmektir (Ibragimov, 2004; Ovsiyannikov, 1982; Olver, 2012).

Simetri kullanımının bir diğer alanı, belirli bir sınıf denklem sistemleri için korunum kanunlarının inşa edilmesidir. Korunum kanunları uygulamada ve fizikte önemli rol oynamaktadırlar. Enerjinin korunumu yasası, enerjinin kararlılığını belirler. Momentumun korunumu yasası, hareketin dokunulmazlığını, öteleme hareketinin yıkılmazlığını belirler. Açısal momentumun korunumu yasası, dönme hareketinin kararlılığını belirler. Coulomb etkileşimini belirleyen yükün korunumu yasası ise, yerçekimi etkileşimi ile birlikte dünyanın yapısını belirler. Kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin korunum kanunlarını oluşturmak için en iyi bilinen teknik Noether'in birinci teoremine dayanmaktadır. Noether teoremi, varyasyonel kısmi diferansiyel denklemler sistemleri için, yani bir fonksiyonelin Euler-Lagrange denklemleri olarak elde edilebilen sistemler için koruma yasalarını belirlememize izin verir. Ayrıca, korunum kanunlarını oluşturma prosedüründe de sistemin simetrisi kullanılır. Korunum kanunlarının inşasında bu yaklaşımın avantajı, başlangıçtaki denklem sistemine yapılan grup analizinde, iyi bilinen ve gelişmiş bir algoritmanın kullanılmasıdır. Yöntemin dezavantajı ise orijinal denklem sisteminin varyasyonel olması gerektiği sınırlamasıdır.

Son yirmi yılda fiziksel ve kimyasal süreçlerin matematiksel modellemesinde giderek daha fazla kullanılan bir başka denklem türü, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerdir (KmDD). Kesirli diferansiyeli inceleyen teori kesirli analiz, doğadaki birçok olayın matematiksel modellemesinde yer almıştır (Das, 2011; Tarasov, 2006; Zelenyi ve Milovanov, 2004). Bununla birlikte, KmDD'lerin simetri özellikleri ve bu tür denklemlerin araştırılması için grup analizi Gazizov vd. (2007) tarafından yapılmış grup analizi yönteminin kesirli mertebeden türevli denklemlere genişletilmesi, kesirli türevin doğasından kaynaklanan bir takım güçlükleri de beraberinde getirmektedir. KmDD'i tamsayıli mertebeden diferansiyel denklemlerden ayıran birinci özellik, bir kesirli türevin integralindeki değişken değiştirme özellikleri ile ilgilidir. Yani, kesirli türev operatörü özel bir türden belirli bir çekirdeğe sahip ve integro-diferansiyel operatör olduğundan, genel durumda, noktasal dönüşümler operatörün kendisini değiştirir. İkinci özellik, kesirli türev operatöründe sabit bir integrasyon sınırı olan bağımsız bir değişkenin sabit bir referans noktasının varlığıdır. Üçüncü özellik ise, kesirli türev operatörünün yerel olmamasıdır. Bu durum, iki fonksiyonun çarpımının türevi ve yanı sıra karmaşık bir fonksiyonun türevi, bir kesirli mertebeden türevi, integrali ve yerel olmayan değişkenleri içeren sonsuz toplama sebep olmaktadır.

Gazizov vd. (2007) bu özellikleri göz önüne alıp Riemann-Liouville ve Caputo türevini içeren KmDD'ler için simetri analizini yapmıştır.

Herhangi bir diferansiyel denklemin simetrisinin, çözümler için denklemin tanımlandığı manifoldu değişmez bırakan bir dönüşüm olduğu bilinir. Uygulamada, Lie grup yöntemi, tamsayı türevleri ve kesirli türevleri olan diferansiyel denklemleri, daha az sayıda bağımsız değişkenli denklemlere indirgemektedir. Ancak Lie grup analizi üzerine yaptığımız baştaki çalışma bize "Peki denklem ile birlikte başlangıç ve sınır değer koşulların değişmezliği nedir?" sorusuna merak uyandırmıştır. Lie'den sonra Ovsyannikov (1958) mekanik sistemleri temsil eden diferansiyel denklemlerin davranışı grup analizi yaklaşımıyla araştırılmıştır. Bu çalışmada değişmez çözümler kavramının tanıtılması ve oluşturulması için basit ve etkili algoritmalar ortaya konmuştur. Ayrıca, keyfi fonksiyonlar ve parametreler içeren diferansiyel denklem sistemlerinin bir grup sınıflandırmasını oluşturmuştur. Sınıflandırma sonucunda, parametre değerleri ve fiziksel nicelikleri deneysel olarak belirlenmiş, bağımlılıklarını ayırt etmiş ve böylece denklem sistemi tarafından izin verilen grubun genişlediği görülmüştür. Dahası, Ovsyannikov $y_t = F(t, x, y, y_x)$ kısmi diferansiyel denklemi ile $y(0, x) = \phi(x)$ başlangıç değerini göz önüne alıp simetri analizini yapmıştır. Daha sonra Bluman (1974) çalışmasında $y_t = F(t, x, y, y_x)$ denklemi ile verilen başlangıç sınır değer problemin simetrilerini bulmak için koşullar belirlemiştir. Lie grup yönteminin, KmDD'lerin araştırılması için güçlü, sistematik ve doğrudan yöntem olmasına rağmen başlangıç ve sınır değerli KmDD'lerde başarısız olduğu için, başlangıç ve sınır değerli KmDD'lere simetri analizi için uygulanan klasik Lie teorisinin yeniden düzenlemesi gerektiği gerçeği bilinmektedir.

Bu tez çalışmamızdaki önemli bir motivasyon da

$${}^CD_t^\alpha u = g\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right), \quad (x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

Caputo türevli kısmi diferansiyel denklemi içeren başlangıç ve sınır değer problemleri için Lie simetri analizi yapmaktır. Burada

$${}^CD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau) d\tau, \quad n < \alpha < n+1, \quad n \in \mathbb{N},$$

g ; x bağımsız değişkeni ile u bilinmeyen fonksiyonu ve u fonksiyonunun x değişkenine göre sonlu sayıda kısmi türevlerinin bir fonksiyonudur.

Bu çalışma aşağıdaki başlıklar altında özetlenebilir: Birinci bölümde tez için giriş verilmiş ve ikinci bölümde Lie grup yöntemi ve kesirli analiz ile ilgili literatür taraması yapılmıştır.

Üçüncü bölümde grup teorisinin temel bilgileri verilmiş ve ayrıntılı olarak Lie gruplarının tanımı, temel özellikleri, gruba ait operatörler, bu operatörler arasındaki temel ilişki, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için korunum kanunların tanımı ve belirleme yöntemi verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde kesirli analizin temel kesirli integral ve Caputo ile Riemann-Liouville türevlerinin tanımı, özellikleri, aralarındaki ilişki ve kesirli türev içeren diferansiyel denklemler için Lie grup analizi sunulmuştur.

Beşinci bölümde başlangıç ve sınır değer problemleri için Lie grup analizi verilmiştir. Burada Caputo türev içeren diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır değer problemleri için oluşturduğumuz Lie grup teorisi verilmiştir. Caputo türev içeren bir başlangıç sınır değer probleminin simetri tanımı ve koşulları belirlenip teorem verilerek ispatı yapılmıştır.

Tezin altıncı bölümünde Riemann-Liouville türev içeren diferansiyel denklemlere Lie simetri analizinin uygulaması, elde edilen çözümler ve korunum kanunları verilmiştir.

Burada,

$${}_0D_t^\alpha u = (g(u)u_{xx})_x,$$

Riemann-Liouville türevli diferansiyel denklemi için elde ettiğimiz çözümlerin sonuçları yayınlanmıştır (Iskandarova ve Kaya, 2017). Bununla birlikte, aşağıdaki başlangıç sınır değer problemi ele alınmış

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + P(u^n)_x = Qg(t)(u^n)_{xxx}, \\ u(t, 0) = \Psi(t), \\ u(0, x) = \Phi(x), \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [0, T], \\ x \in \mathbb{R}^+, \end{matrix}$$

burada $u(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$, $T > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $P, Q \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler ve $n \neq 1 \in \mathbb{R}$ için bir fonksiyon olacak şekilde genelleştirilmiş KdV diferansiyel denkleminin sonsuz küçük üretici ve korunum kanunları sunulmuştur (Kaya ve Iskandarova, 2019).

Yedinci bölümde ise Caputo türev içeren başlangıç sınır değer problemleri için oluşturduğumuz Lie grup teorisinin uygulaması verilmiştir. Burada başta kesirli

$${}^CD_t^\alpha u = (A(u)u_x)_{xx},$$

zaman-kesirli Harry-Dym denklemi için

$$\begin{cases} u(t, 0) = f(t), \\ u(0, x) = g(x), \end{cases} \quad \begin{matrix} t > 0, \\ x > 0, \end{matrix}$$

başlangıç sınır değer problemi için sonsuz küçük üretici ve simetri problemleri verilmiştir (İskenderoğlu ve Kaya, 2019). Daha sonra Caputo türevli difüzyon denklemi ve 3. mertebeden diferansiyel denklem için başlangıç sınır değer problemlerin simetrileri sırasıyla,

$$u(t, x) = {}^{p+1}\sqrt{\frac{p^2\Gamma(1 - \frac{\alpha}{p})}{2(2-p)\Gamma(1 - \frac{\alpha}{p} - \alpha)}} x^{\frac{2}{p}} t^{-\frac{\alpha}{p}},$$

ve

$$u(t, x) = {}^{q+1}\sqrt{\frac{q^3\Gamma(1 - \frac{\alpha}{q})}{3(3 - q)(3 + q)\Gamma(1 - \frac{\alpha}{q} - \alpha)}} t^{-\frac{\alpha}{q}} x^{\frac{3}{q}},$$

elde edilmiştir. Ayrıca bu çözümlerin tekliği için teorem verilerek bu teorem ispatlanmıştır (İskenderoğlu ve Kaya, 2020).

Ayrıca bu çalışmadaki sonuçların bir kısmı aşağıdaki dergilerde yayımlanmıştır:

- İskenderoğlu, Kaya, 2020. "Symmetry Analysis of Initial and Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations in Caputo Sense", Chaos, Solitons and Fractals, 134, 109684.
- Kaya, Iskandarova, 2019. "Lie Group Analysis for Initial and Boundary Value Problem of Time-Fractional Nonlinear Generalized KdV Partial Differential Equation", Turkish Journal of Mathematics, 43(3), 1263–1275.
- Iskandarova, Kaya, 2017. "Symmetry Solution on Fractional Equation", An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications, 7(3), 255–259.
- İskenderoğlu, Kaya, 2019. "Symmetry Analysis and Conservation Laws of the Boundary Value Problems for Time - Fractional Generalized Burgers' Differential Equation", Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 2(2), 139–147.
- İskenderoğlu, Kaya, 2019. "On Lie Group Analysis of Boundary Value Problem with Caputo Fractional Derivative", Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 10(3), 369–376.

Ayrıca Fırat Üniversitesi tarafından organize edilmiş olan CMES-2017 konferansına sunum ile katılıp, elde edilen ilk sonuçlar "Symmetry solution on fractional equation" makalesi ile yayınlanmıştır. İstanbul Teknik Üniversitesi tarafından organize edilmiş olan SDEA-III konferansında "Group Analysis Method for Time- Fractional Nonlinear Generalized Burger's Differential Equation" başlıklı sunum yapılmıştır. Daha sonra Yıldız Teknik Üniversitesinde düzenlenen ICOMAA 2018 ve ICOMAA 2019 konferanslarına katılım gerçekleştirilmiş sırasıyla "Lie Group Analysis and

Galilean Group Analysis for Partial Differential Equations" çalışmaları sunulmuş ve "On Lie Group Analysis of Boundary Value Problem with Caputo Fractional Derivative" çalışması yayınlanmıştır. Kıbrıs'ta Yakın Doğu Üniversitesinde organize edilen ICAAM 2018 konferansta "An Application for Time-Fractional $K(m,m)$ Model Equations by Symmetry Method" çalışması sunulmuştur. Bu bildirilere ilaveten Kırşehir'de ICAA 2018 konferansa sunum ile katılım gerçekleştirilmiş "Symmetry Analysis and Conservation Laws of the Boundary Value Problems for Time-Fractional Generalized Burgers' Differential Equation" başlıklı sunum daha sonra makale olarak yayınlanmıştır.

3. GRUP TEORİSİ

3.1. Simetri ve Grup Kavramları

Diferansiyel denklemlerin simetrilerini anlamak için daha basit nesnelerin simetrilerini dikkate almak yararlıdır. Basitçe izah etmek gerekirse, geometrik bir nesnenin simetrisi bir nesneyi görünüşte değişmeden bırakan bir dönüşümdür. Geometride, düzlemin (veya uzayın) göz önüne alınan dönüşümleri, hareket olarak adlandırılır (bunlara yer değiştirmeler de denir). Hareket, noktalar arasındaki mesafelerin korunduğu bir düzlemin dönüşümüdür, yani düzlemin herhangi A ve B noktaları için $|A'B'| = |AB|$ eşitliği sağlanır. Burada A' ve B' bu dönüşüm sırasında A ve B noktalarının eşlendiği noktalardır. $|AB|$ ve $|A'B'|$ sırasıyla A ve B noktaları ve A' ve B' noktaları arasındaki mesafedir. Örneğin hareket, bir düzlemin belirli bir vektöre göre paralel transferi, verilen bir noktaya göre düzlemin merkezi simetrisi, verilen bir doğruya göre düzlemin simetrisi, verilen düzleme göre uzayın ayna simetrisi veya düzlemin belirli bir nokta etrafında belirli bir açı ile dönmesi olarak verilir.

Matematiksel bir nesnenin simetrisi X , belirtilen nesnenin bazı özelliklerini veya yapısını koruyan tersine çevrilebilir bir $X \mapsto X$ dönüşümüdür. Örneğin, bir karenin köşegenlerinin kesiştikleri noktaya göre $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ veya 2π olan bir döndürme simetridir, çünkü bu döndürmeleri gerçekleştirirken, kare şekli tam olarak önceki konumuna geri döner. Aslına bakılırsa 2π dönüşümü hiç bir şey yapamama anlamına denktir, çünkü her nokta kendine dönüşür. Her noktayı kendine eşleyen dönüşüm, herhangi bir geometrik nesnenin simetrisidir ve buna aşıkâr simetri denir. Üstelik karenin ek simetrileri vardır, bunlar karşıt köşeleri birleştiren iki eksen ve karşıt kenarların orta noktalarını birleştiren iki eksendir. Bunlar, dört farklı eksen etrafında yansıtılabilir simetrilerdir. Bu simetriler yansıma simetrileri olarak adlandırılır. Böylece Şekil 2.1.'de görüldüğü gibi kare, toplam 8 simetriye sahiptir (Hydon, 2000).

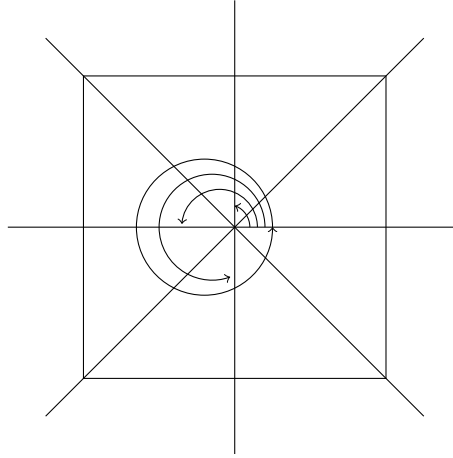
Daha soyut olarak, bir simetri, elemanların sayısını (bijeksiyon), mesafeleri (izometri), lineer

yapıyı, açıları (ortogonal dönüşümler), çarpımsal yapıyı (grupların izomorfizmleri), topolojik yapıyı (homeomorfizmalar), pürüzsüz yapıyı (difeomorfizmalar) koruyan bir dönüşüm olabilir. Yani simetri bir otomorfizmdir. Matematiksel olarak, simetri kavramı

grup teorisi tarafından kapsanır ve aşağıdaki verilen özellikler sağlanır:

- İki simetri göz önüne alındığında, birbiri ardına uygulamak tekrar simetri dönüşümünü tanımlamalıdır.
- Üç simetri dönüşümü göz önüne alındığında, üçünün bileşimi iyi tanımlanmış bir dönüşümle sonuçlanmalıdır.
- Hiçbir şey yapmamak, özdeşlik dönüşümü olarak simetri dönüşümü sayılır.
- Herhangi bir simetri dönüşümü ters dönüşümü ile geri alınabilir.

Bu özellikler grup kavramını tanımlar (Hydon, 2000). Düzlemin veya uzayın tüm hareketlerinin kümesi bir grup oluşturur. Grup operasyonu iki hareketin belirli bir sırayla ardışık olarak yürütülmesi, iki hareketin bir bileşimidir. Bu ardışık dönüşümlerin her birinin bir sonucu olarak uzay noktaları arasındaki mesafe korunur, yani iki hareketin bileşkesinin bir hareket olduğu anlaşılmaktadır. Zira hareketlerin bileşkesi birleşme özelliğine sahiptir. Hareket grubunun birimi özdeşlik dönüşümüdür, öyleki düzlemin her bir noktasının görüntüsü bu noktanın kendisidir. Ve son olarak, belirli bir harekete ters dönüşüm de noktalar arasındaki mesafeyi korur, yani bir harekettir.



Şekil 2.1. Karenin simetrileri

Grupların model örnekleri dönüşüm gruplarıdır. Grup teorisinin ilk uygulaması fizikte görülmektedir. 17. yüzyılda, Galileo bir eylemsiz referans sisteminden diğerine geçiş sırasında mekanik denklemlerin değişmezliğini araştırır ve bugün Galileo dönüşümleri olarak bilinen dönüşümleri elde eder. Daha sonra bu dönüşümler 1904 yılında Lorentz

dönüşümlerine genelleştirilir (Lorentz, 1904). Bu iki dönüşüm grubunu bir sonraki kısımda anlatacağız.

3.2. Galileo ve Lorentz Grup Dönüşümleri

Maddesel noktaların hareketi, diğer cisimlere göre konumlarındaki bir değişiklik olarak tanımlanır. Kolaylık olması açısından, bu nispi hareketin tanımlaması için hayali bir mutlak hareketsiz cisim verilir ve bu mutlak hareketsiz cisme göre araştırılan maddesel noktaların konumu belirlenir. Bu cisim referans sistemi olarak adlandırılır. Farklı referans sistemleri birbirine göre hareket halinde olabilir. Bu referans sistemiyle ilişkili koordinat sistemini vererek belirli bir diğer referans sistemine göre bir noktanın konumu belirlenebilir. Maddesel bir noktanın hareketi, sadece uzaydaki konumu ile değil, aynı zamanda bu konumun zamana bağımlılığı ile de karakterize edilir. Belli bir zamanda bir maddesel noktanın konumunun belli koordinatlar tarafından belirlenmesine olay denir. Bir olay dört parametre ile karakterize edilir, bunlar bir zaman ve üç uzay koordinatlarıdır.

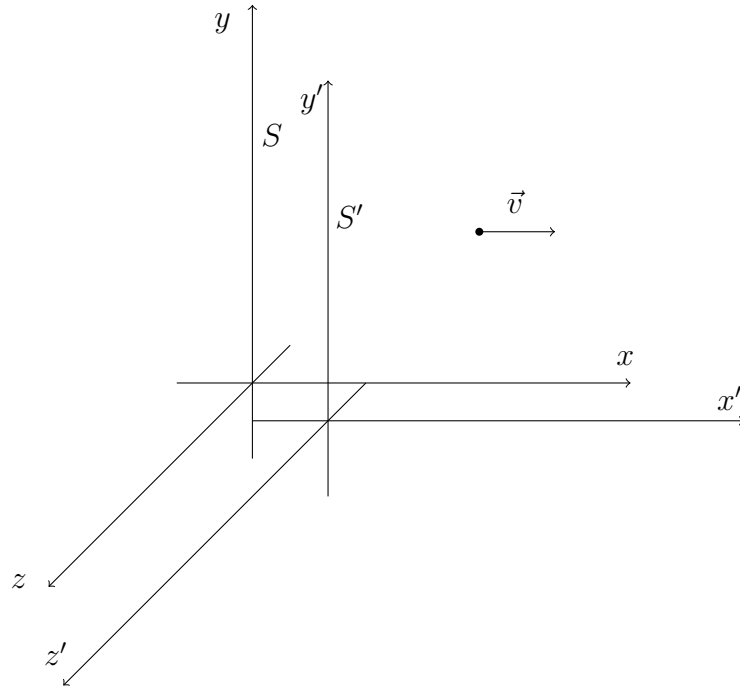
Newton mekaniğinde, en önemli rollerden biri Galileo dönüşümleridir, bunlar ise uzay-zaman simetri grubunu oluşturur. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$ uzay-zamanı göz önüne alalım, burada $\mathbb{R}$ zamana ve $\mathbb{R}^3$ uzaya karşılık gelir. Newton'un birinci kuralını sağlayan eylemsizlik (yani dış etkilere maruz olmayan bir cisim ya hareketsizdir ya da doğrusal ve düzgün hareket eder) referans sistemini göz önüne alalım.

Tanım 3.1. (Gürsey, 1964) İki eylemsiz referans sistem mevcut olsun, bunlardan birini, S hareketsiz olarak kabul edelim; ikinci sistem, S' şekilde görüldüğü gibi S' 'ye göre sabit bir v hızında hareket etsin. O zaman S ve S' sistemlerinde maddesel noktanın koordinatları için Galileo dönüşümleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} t' &= t + a, \\ x' &= Rx + vt + b, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada a bir zaman dönüşümü, b bir uzay dönüşümü, v Galileo dönüşümüne göre değişmez olan ivme ve R bir alan rotasyonudur (Şekil 2.2.'ye bakınız).

Özel görelilik teorisinde Lorentz dönüşümü, bir eylemsizlik referans sisteminden diğerine geçiş sırasında bir olayın koordinatlarının ve zamanının dönüştürülmesidir. 1904 yılında Lorentz tarafından klasik mikroskopik elektrodinamik (Lorentz-Maxwell denklemleri) denklemlerinin formlarını koruduğu dönüşümler olarak elde edilmiştir. 1905'te Einstein onları özel görelilik teorisinin temelini oluşturan iki önermeye dayanarak türetmiştir: tüm atalet referans sistemlerinin eşitliği ve vakumdaki ışık hızının bir ışık kaynağının hareketinden bağımsızlığı gibidir.



Şekil 2.2. Lorentz dönüşümü

Tanım 3.2. (Gürsey, 1964) Aynı doğru üzerinde bulunan x ve x' eksenleri olan ve buna göre paralel diğer y ve y' , z ve z' eksenleri olan, iki eylemsiz referans sistemi S ve S' ele alalım. Şayet S sistemi x eksenini yönünde v sabit hızı ile S' sistemine göre hareket

ederse, bu geçiş sırasında oluşan Lorentz dönüşümleri řu şekildedir:

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Burada c ışığın vakumdaki hızıdır.

Bu dönüşümler öteleme, dönme veya yansıma, Galilean boots olarak adlandırılan yalın hareketi gibi simetri grubunu ve hatta Lie grubunu oluşturur.

3.3. Lie Grup Dönüşümü

Diferansiyel denklemler fizik, mühendislik, kimya, biyoloji ve ekonomi alanlarındaki çeşitli süreçleri tanımlamak ve incelemek için etkili bir araçtır. Aynı zamanda matematik dallarının çoğunun gelişmesine yol açan en önemli araştırma alanlardan biridir. Fonksiyonel analiz, lineer cebir, sayısal analiz ve geometrinin birçok bölümü kökenlerini diferansiyel denklemler teorisini geliştirme ihtiyacına borçludur. Cebirsel denklemlerin çözümü için Abel - Galois teorisinin bir genellemesi olarak, özellikle cebir, analiz ve geometri yöntemlerini birleştiren sürekli grup teorisi, adi diferansiyel denklemlerin integral alma yöntemlerini birleştirmek için Lie tarafından oluşturuldu. Poincare tarafından Lie grupları olarak adlandırılan sürekli grupların, diferansiyel denklemler, manifoldlar ile yerçekimi teorisi, kuantum mekaniğı gibi birçok alan üzerinde derin bir etkisi oldu.

Bir diferansiyel denklemin simetri grubunu bilmek, bu denkleme, bu grubun çeşitli alt grupları altında değışmeyen çözümler bulmasını ve bilinenlerden yeni çözümler üretilmesini sağılar. Adi diferansiyel denklemler söz konusu olduğıunda, tek parametrelili simetri grubunun bilgisi, denklemin mertebesini düşürmeyi sağılar. Kısmi diferansiyel denklemler için ise, simetri grubunun alt gruplarına göre değışmeyen çözümleri tanımlayan fonksiyonlar, genellikle daha az değışken içeren indirgenmiş denklemleri karşılar, bu ise ele alınan denklemin analiz etme ve çözme işlerini biraz daha basitleştirir.

Tanım 3.3. (Olver, 2012) Eğer sayılabilir bazı olan M topolojik Hausdorff uzayında her nokta $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında B_1^n açık birim yarıçaplı n boyutlu bir küreye homeomorfik olacak şekilde bir komşuluğu sahipse, bu uzaya n -boyutlu manifold denir.

Tanım 3.4. (Olver, 2012) Üzerinde tanımlı $(*)$ ikili işlem, boş olmayan G kümesine, hem bir grup hem de düz bir manifold olup aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise grup denir:

(i) Kapalılık özelliği: $\forall a, b \in G$ için $a * b \in G$ 'dir.

(ii) Birleşme özelliği: $\forall a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ 'dir.

(iii) Birim eleman özelliği: $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

(iv) Ters eleman özelliği: $\forall a \in G$ için $a * b = b * a = e$ olacak şekilde bir tek $b \in G$ vardır.

$\Psi(t, x, u, \varepsilon)$, $\Phi(t, x, u, \varepsilon)$ ve $\Upsilon(t, x, u, \varepsilon)$ fonksiyonları t, x, u değişkenli ve ε parametrelili, sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlar kümesi olsun. $t = \Psi(t, x, u)$, $x = \Phi(t, x, u)$ ve $u = \Upsilon(t, x, u)$ (birim elemanı) eşitliği sağlanacak şekilde ε sonsuz küçük parametredir.

$$\hat{t} = \Psi(t, x, u, \varepsilon),$$

$$\hat{x} = \Phi(t, x, u, \varepsilon),$$

$$\hat{u} = \Upsilon(t, x, u, \varepsilon),$$

$\hat{\hat{t}} = \Psi(\hat{t}, \hat{x}, \hat{u}, \Theta(\varepsilon))$, $\hat{\hat{x}} = \Phi(\hat{t}, \hat{x}, \hat{u}, \Theta(\varepsilon))$, $\hat{\hat{u}} = \Upsilon(\hat{t}, \hat{x}, \hat{u}, \Theta(\varepsilon))$ (ters elemanı) ve $\Theta(\varepsilon)$ sürekli ve türevlenebilir fonksiyon olacak şekilde dönüşümler grubu göz önüne alınsın. Bu dönüşümünün $\varepsilon = 0$ için Taylor seri açılımı

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= \Psi(t, x, u) + \varepsilon \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon^2} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \dots, \\
\hat{x} &= \Phi(t, x, u) + \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \dots, \\
\hat{u} &= \Upsilon(t, x, u) + \varepsilon \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \varepsilon^2} \right) \Big|_{\varepsilon=0} + \dots
\end{aligned} \tag{3.3}$$

dönüşüm grubunu verir. Üstelik ε sonsuz küçük bir değer olduğu için (3.3) dönüşümü

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= t + \varepsilon \tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\
\hat{x} &= x + \varepsilon \xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\
\hat{u} &= u + \varepsilon \eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklini alır. Burada $\tau(x, t, u) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0}$, $\xi(x, t, u) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0}$, $\eta(x, t, u) = \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial \varepsilon} \right) \Big|_{\varepsilon=0}$ fonksiyonlarına (3.4)'nin sonsuz küçükleri denir. Grubun sınırsız operatörleri olan sonsuz küçük üreteç

$$X = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.5}$$

şeklinde olup, her biri bir simetri olan, sonsuz küçük X_i , $i \in \mathbb{N}$ operatörleri tanımlamamıza izin verir. Yukarıdaki özelliklere sahip (3.4) dönüşümler grubu tek parametrelî Lie grubu olarak adlandırılır.

Herhangi $g(t, x, u)$ bir fonksiyonu

$$Xg(t, x, u) \Big|_{g(t, x, u)=0} = 0,$$

eşitliklerini sağlıyorsa bu fonksiyon Lie grubu altında değişmez fonksiyon olur. L , birinci mertebeden

$$L = \left\{ \xi_i^\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \alpha = 1, \dots, r \right\},$$

şeklindeki lineer diferansiyel operatörlerin uzayı olsun.

Tanım 3.5. (Bluman, 2002) $X = \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $Y = \varsigma_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ iki operatör için $[X, Y]$ ikili işleme bir Lie çarpımı veya Lie parantezi denir ve

$$[X, Y] = XY - YX = \left(\xi_i(x) \frac{\partial \varsigma^k}{\partial x_i} - \varsigma_i(x) \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

eşitliği ile tanımlanır. Ayrıca her $X_1, X_2, X_3 \in L$ için

1. herhangi $X \in L$ için $[X, X] = 0$;
2. çiftte doğrusal (bilineer) özelliği: $[aX_1 + bX_2, X_3] = a[X_1, X_3] + b[X_2, X_3]$,
 $[X_3, aX_1 + bX_2] = a[X_3, X_1] + b[X_3, X_2]$;
3. ters simetri (antikomutatif) özelliği: $[X_1, X_2] = -[X_2, X_1]$;
4. Jacobi özdeşlik özelliği: $[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0$;

olarak sağlayıp bir Lie cebirini oluşturur.

Tanım 3.6. (Bluman, 2002) $s \in \mathbb{N}$ iken L_s operatörlerin lineer uzayına, Lie çarpımı operasyonuna göre kapalı operatörlerin Lie cebiri denir.

$0 < s < \infty$ olsun, o zaman L_s Lie cebirinde $\{X_1, \dots, X_s\}$ baz elemanları seçilebilir. Herhangi bir baz operatörün Lie çarpımı

$$[X_i, X_j] = C_k^{ij} X_k, \quad i, j, k = 1, \dots, s,$$

aynı baz üzerinde yazılır. C_k^{ij} olan sabitler yapı sabitleri olarak isimlendirilir.

Örnek 3.1. (Ibragimov, 2004) İyi bilinen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (3.6)$$

KdV denklemi için Lie simetri grup yöntemi uygulandığında

$$X = (c_1 t + c_2 x) \frac{\partial}{\partial x} + (3c_2 t) \frac{\partial}{\partial t} + (-c_1 - 2c_2 u) \frac{\partial}{\partial u},$$

biçiminde olan sonsuz küçük üretici elde edilir. Böylece bu üretici iki

$$X_1 = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (3.7)$$

sonsuz küçük operatör üretir. Nitekim bu iki operatör KdV denklemin L_2 Lie cebirini oluşturup iki baz simetrisini temsil eder ve

Çizelge 2.1. KdV denklemi için Lie cebir çarpım tablosu

	X_1	X_2
X_1	0	$-2X_1$
X_2	$2X_1$	0

Lie cebir çarpım çizelgesindeki gibi verilebilir. Örneğin X_2 operatör için denklemin değişmezliği

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 3t \frac{\partial u}{\partial t} - 2u = 0,$$

eşitlik şeklinde olup

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{3t} = \frac{du}{-2u},$$

karakteristik denklemin integrali alınıp çözülür. Sonuç olarak $u = t^{\frac{2}{3}}h(p)$, $p = \frac{x^3}{t}$ olacak şekilde bir dönüşüm elde edilir ve bu dönüşüm altında (3.6) KdV denklemi

$$-\frac{2}{3}h(p) - ph'(p) + p^{\frac{2}{3}}h(p)h'(p) + 6h'(p) + 54ph''(p) + 27p^2h'''(p) = 0,$$

indirgenmiş adi diferansiyel denklem şeklini alır.

Böylece, diferansiyel denklemlerin değişmezlik özelliğinden, Lie grup dönüşümleri bu denklemler için sonsuz küçük operatörleri bulmamıza imkan sağlar. Bu operatörler kümesi bir Lie cebiri oluşturup her biri yeni bir dönüşüm verip diferansiyel denklemin

mertebesini veya bağımlı değişken sayısını düşürmemize izin verir ve aslında simetrisine ulaşmamıza izin verir.

3.4. Korunum Kanunları

Lie gruplarının önemli uygulamalarından biri de ele alınan denklemlerin korunum kanunlarını belirlemektir. 1918'de Noether, korunum kanunları ile doğa yasalarının fizikte sahip olduğu simetrinin arasındaki bağlantıyı ispatladı. Noether teoremi, fiziksel bir sistemin her sürekli simetrisinin belirli bir koruma kanununa karşılık geldiğini belirtir.

Korunum kanunları lineer olmayan denklemler için büyük öneme sahiptir; tüm çözümler için fiziksel, korunan miktarlar ve korunan normları sağlar.

$$F_\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(s)}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (3.8)$$

m tane (lineer veya lineer olmayan) diferansiyel denklem içeren sistemi göz önüne alalım. Burada $x = (x^1, \dots, x^n)$ bağımsız değişken, $u = (u^1, \dots, u^m)$ bir bağımlı değişken ve

$$u_{(1)} = u_{(i)}^\alpha, \quad u_{(2)} = u_{(ij)}^\alpha, \dots \quad (i = 1, \dots, n),$$

u fonksiyonunun tüm bağımsız değişkenlere göre türevlerdir.

Tanım 3.7. (3.8) diferansiyel denklemleri için (diferansiyel formda) korunum kanunları n -boyutlu tam diverjans

$$\sum_{i=1}^n D_i[P_i] = 0,$$

formdaki eşitliğe denir. Burada $P_i = P_i(t, x, u)$ türevlenebilir fonksiyonlar ve D_i aşağıdaki gibi tam diferansiyeldir:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{i_1 i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + \dots + u_{i_1 \dots i_l i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_l}^\alpha} + \dots \quad (3.9)$$

Korunum kanunlarını inşa etmek için kullanılan yöntemlerden biri olan aşağıdaki yolu takip edip ve sunulan İbragimov'ın teoremini kullanmak gerekir. Göz önüne alınan (3.8) denklemlerine eşlenik denklemleri

$$F_\alpha^*(x, u, v, u_{(1)}, v_{(1)}, \dots, u_{(s)}, v_{(s)}) = \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta u} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (3.10)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\mathfrak{L} = \sum_{\alpha=0}^m v^\alpha F_\alpha, \quad (3.11)$$

$\mathfrak{L}$ formal Lagrangian ve v^α yeni bağımsız değişkenlerdir. Ayrıca $\frac{\delta}{\delta u}$ aşağıdaki gibi ifade edilen Euler-Lagrange operatörüdür:

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^\alpha}. \quad (3.12)$$

Örnek 3.2. (Olver, 2012) $\alpha = 1, m = 1$ özel durumu için $u = f(x)$ olacak şekilde tek bağımsız değişkenli fonksiyonu için Euler-Lagrange operatörü

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-D_x)^j \frac{\partial}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \dots$$

şeklinde olur. Burada D_x, x' 'e göre tam diferansiyel, $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$ kısmi türevdir.

(3.11) için (3.12) Euler-Lagrange operatörü uygulandığında

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta u^\alpha} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_{i_1 \dots i_s}^\alpha} = 0, \quad (3.13)$$

Euler–Lagrange denklemleri elde edilir.

Örnek 3.3. (Olver, 2012) Örnek 3.2’de verilen $u = f(x)$ fonksiyon için n . mertebeden Euler–Lagrange denklemi

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} - D_x \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_x} + D_x^2 \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_{xx}} - \dots + (-1)^n D_x^n \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_n} = 0,$$

şeklini alır. Bu ise $2n$ mertebeden adi diferansiyel denklemdir. $L(x, u, u_x)$ için

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} - D_x \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u_x} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u} - \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial x \partial u_x} - u_x \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial u \partial u_x} - u_{xx} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial u_x^2},$$

şeklinde olan 2. mertebeden Euler-Lagrange denklemi elde edilir.

Noether teoremine (1918) göre $\mathfrak{L}(x, u, u_{(1)})$ Lagrangian,

$$X = \xi^i(x, u, u_{(1)}, \dots) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, t, u, u_{(1)}, \dots) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (3.14)$$

üretee sahip G simetri grubu altında değişmez ise bu takdirde $C = (C^1, \dots, C^n)$ vektör alanı

$$C^i = \xi^i \mathfrak{L} + (\eta^\alpha - \xi^j u_j) \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial u}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlanıp (3.13) Euler–Lagrange denklemleri için korunum kanunlarını verir. Ayrıca (3.13)’nin tüm çözümleri için

$$Div C \equiv D_i(C^i) = 0, \quad (3.16)$$

demektir. Bu C^i vektör alanına (3.13) denklemi için korunum vektörü denir. C^i 'yi bulmak için Ibragimov tarafından 2006'de ispatlanan aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem 3.1. (Ibragimov, 2006 ve 2011) Herhangi bir (3.14) sonsuz küçük üreteç altında değişmez olan (3.8) denklemleri için $D_i(C^i) = 0$ korunum kanunları aşağıdaki eşitlik ile oluşturulur:

$$C^i = \epsilon^i \mathcal{L} + W^\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^\alpha} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} + D_j D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} - \dots \right) +$$

$$D_j(W^\alpha) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\alpha} - D_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} + \dots \right) + D_j D_k(W^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\alpha} - \dots, \quad (3.17)$$

burada $W = \eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha$ ve $\mathcal{L}$ formal Lagrangian. (3.17) eşitliğinin uygulanmasında, formal Lagrangian $\mathcal{L}$ tüm karışık türevlere göre u_{ij} , $u_{ijk}, \dots$ simetrik biçimde yazılmalıdır.

Örnek 3.4. (Ibragimov, 2006 ve 2011) Daha önce göz önüne alınan (3.6) KdV denklemi için korunum kanunları belirlemek gerekirse (3.7) sonsuz küçük operatörlere ihtiyaç vardır. Bu denklem için Lagrangian

$$\mathcal{L} = v(u_t - uu_x - u_{xxx}),$$

formunda olur. İbragimov teoremi uygulandığında X_1 sonsuz küçük operatöre karşılık gelen

$$D_t(C^1) + D_x(C^2) = 0,$$

formunda korunum kanunu verir. Burada $C^1 = (1 + tu_x)v$, $C^2 = t(v_x u_{xx} - u_x v_{xx} - vu_t) - uv - v_{xx}$ olacak şekildedir.

$\mathcal{L}$ Lagrangianın tanımı (3.11) vektörün (3.17) "fiziksel olmayan" v değişkenleri içerdiğini göstermektedir. Bu nedenle, $D_i(C^i) = 0$ koruma denkleminin geçerliliği, yalnızca (3.8) denklemleri değil, aynı zamanda eşlenik olan (3.10) denklemlerini de

hesaba katmamızı gerektirir. Fakat sistem (3.8) yarı self-adjoint (özellikle self-adjoint) ise, v 'leri $v^\alpha = \phi(u)$, $\phi(u) \neq 0$ koşulları ile yerleştirme yoluyla ortadan kaldırabilir ve (3.8) denklemler için bir korunum yasası elde edilebilir.

4. KESİRLİ MERTEBEDEN TÜREV

Tamsayı olmayan mertebeden integral ve diferansiyelin genişletilme fikri integral ve diferansiyel hesabın başlangıcından beri vardır. Bununla birlikte, olası uygulamaların geniş kapsamına rağmen, yakın zamana kadar bu alan çok az ilgi görmüştür. $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}$ mertebeden diferansiyeli değerlendirme olasılığı hakkındaki ilk fikir 1695 yılında Leibnitz'in L'Hôpital'e yazdığı mektuplarda bulunur. Ayrıca bu konu ile alakalı bazı referanslar Euler (1738), Laplace (1812), Lacroix (1820) ve Fourier (1822) çalışmalarında da yer almaktadır. Kesirli analizin tam teorisi ve bazı uygulamaları Liouville tarafından (1832–1837) yapılan bir dizi çalışmada sırasıyla tanımlanmıştır. 19. yüzyılın sonunda Liouville tarafından önerilen yapıya ve 1874 yıllarına ait Riemann'ın daha sonraki çalışmalarına dayanarak kesirli kalkülüs teorisinde bugün klasik kabul edilen sonuçlar elde edilmiştir.

Son yıllarda, kesirli analize olan ilgi artmaktadır. KmDD gittikçe daha fazla dikkat çekerek bir çok KmDD'in sayısal çözümleri (Kaya vd., 2017), fizikteki dinamik işlemleri, elektromanyetik (Zelenyi ve Milovanov, 2004), akustik, astrofizik (Tarasov, 2006), viskoelastisite, kimya, elektrokimya vb. (Diethelm, 2010; Miller ve Ross, 1993; Wu ve Lee, 2010) gibi alanlarda araştırma yapmak için başarıyla kullanılmıştır.

Kesirli türevleri incelemeden önce klasik türev ile integralin tanımını ve özelliklerini, bazı özel fonksiyonları bu kısımda verelim.

4.1. Kısmi Türev

Kesirli analizde yer alan ve basit fonksiyonlardan biri olan Euler'in Gama fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

integrali ile tanımlanır.

Gama fonksiyonunun bazı özellikleri:

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$

$$2. \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t}|_0) = -0 - (-1) = 1,$$

3. Değişken n tamsayı değerleri için

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!\Gamma(1) = n!$$

şeklinde verilir. Gama fonksiyonunu kullanarak, faktöriyel fonksiyonunun ayrık doğasını kaldırmak bize integral operatörün kesirli analizde uygulaması için doğal olarak yerine gelen bir fonksiyon verir.

Beta fonksiyonu kesirli analizin bir başka önemli fonksiyonlardan biri olup $B(m, n)$ ile gösterilir ve

$$B(m, n) = \int_0^1 \tau^{m-1} (1-\tau)^{n-1} d\tau,$$

ile tanımlanır.

Beta fonksiyonunun bazı özellikleri:

1. Beta fonksiyonu Gama fonksiyonu ile aşağıdaki ifadesiyle bağlıdır

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

$$2. B(m, n) = B(n, m),$$

$$3. B(1, 1) = 1,$$

$$4. B(m, n) = B(m+1, n) + B(m, n+1),$$

$$5. B(m, n+1) = \frac{n}{m+n} B(m+1, n) = \frac{n}{m+n} B(m, n),$$

verilir.

Bu çalışmada kullanacağımız özel fonksiyonların sonuncusu, α ve β , iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0,$$

ile tanımlanan özel bir fonksiyondur.

Ayrıca $\beta = 1$ olduğunda genellikle $E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z)$ fonksiyonunu bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu olarak tanımlanır. Mittag-Leffler fonksiyon serisi α ve β , pozitif ve reel olduğunda her z için yakınsaktır. Bundan dolayı Mittag-Leffler fonksiyonu, tam bir fonksiyondur. Gama ve trigonometrik fonksiyonlarla bağlantısı ve bazı özellikleri aşağıdaki gibi belirlenir:

1. $E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$
2. $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$
3. $E_{2,1}(z) = \cosh(\sqrt{z}),$
4. $E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}.$

Şimdi klasik türev ve integral kavramına odaklanmak için ilk önce türev tanımını verelim.

Tanım 4.1. (Uchaikin, 2013) $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun; $x_0 \in (a, b)$, $x = x_0 + h$ ve $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$ ise bu limite, f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve $\frac{d}{dx}f(x_0)$ ya da $f^{(1)}(x_0)$ ile gösterilir. Yani

$$D_x f(x) = \frac{d}{dx} f(x_0) = f^{(1)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (4.1)$$

olacak şekilde D_x türev operatörü tanımlanır.

$f(x)$ fonksiyonun ardışık olarak (4.1) türevleri alındığında

$$f^{(1)}(x) = D_x f(x),$$

$$f^{(2)}(x) = D_x f^{(1)}(x) = D_x^2 f(x),$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = D_x f^{(n-1)}(x) = D_x^n f(x),$$

ile n . mertebeden türevin genel formuna ulaşılır. Ek olarak 0. mertebeden türevi,

$$f^{(0)}(x) = D_x^0 f(x) = f(x),$$

fonksiyonun kendisine eşit bu diziyi tamamlamak uygundur.

Fonksiyon argümanı türev (diferansiyel) değişkene göre farklıysa, operatör sembollerini kullanmak özellikle uygundur. Örneğin,

$$D_x^n f(cx) = \frac{d^n f(cx)}{d(x)^n} = c^n \frac{d^n f(cx)}{d(cx)^n} = c^n f^{(n)}(cx) \neq f^{(n)}(cx).$$

Elde edilen türevler aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. Homojenlik (argümanın lineerlik) özelliği: c, d sabitler için $D_x^n f(cx + d) = c^n f^{(n)}(x + d)$;
2. Lineerlik özelliği: c, d sabitler için $[cf(x) + dg(x)]^{(n)} = cf^{(n)}(x) + dg^{(n)}(x)$;
3. Mertebe toplama özelliği: $[f^{(n)}(x)]^{(m)} = f^{(n+m)}(x) = [f^{(m)}(x)]^{(n)}$ veya $D_x^m D_x^n f(x) = D_x^{m+n} f(x) = D_x^n D_x^m f(x)$;
4. Çarpımın türevi (Leibnitz Kuralı): $[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} f^{(l)}(x)g^{(n-l)}(x)$;
5. Pozitif tamsayı dereceli üstel bir fonksiyonunun türev özelliği: $c \in \mathbb{R}$ ve $m, n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$D_x^n (x - c)^m = m(m-1)\dots(m-n+1)(x-c)^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-c)^{m-n},$$

ve hatta aşağıdaki ifadeyi belirlemek yararlı olacaktır

$$D_x^n (x - c)^m = \begin{cases} m!, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

6. Genellikle fonksiyonları asimptotik ($x \rightarrow \infty$ gibi) serilerin açılımı için kullanılan negatif tamsayı mertebeli üstel bir fonksiyonunun türev özelliği:
 $m, n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$D_x^n (x - c)^{-m} = (-1)^n \frac{\Gamma(m + n)}{\Gamma(m)} (x - c)^{-(m+n)}.$$

Şimdi bir sabit alt sınır c 'den mevcut x değerine tekrar ve tekrar integrali alma ile aynı orijinal $f(x)$ fonksiyonundan elde edilen başka bir $f_m(x)$ dizi fonksiyonlarını düşünelim:

$$f_1(x) = \int_c^x ds_1 f(s_1), \quad f_2(x) = \int_c^x ds_2 \int_c^{s_2} ds_1 f(s_1), \dots,$$

$$f_n(x) = \int_c^x ds_n \int_c^{s_n} ds_{n-1} \dots \int_c^{s_2} ds_1 f(s_1), \dots.$$

Üstelik bu fonksiyon için

$$D_x f_n(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f_{n-1}(s) ds = f_{n-1}(s), \quad n \geq 1,$$

eşitliği sağlanır. Eğer yeni dizinin elemanlarını n indisinin önündeki işareti değiştirerek yeniden indislenir ise

$$f_n(x) = {}_c f^{(-n)}(x) = {}_c D_x^{-n},$$

ve soldan, yeni indisler artan düzeninde pozitif sayılı türevleri de diziye eklenirse, soldan sağa doğru D_x operatörünü kullanarak

$$..., {}_cD_x^{-n}f(x), ..., {}_cD_x^{-1}f(x), {}_cD_x^0f(x), {}_cD_x^{(1)}f(x), ..., {}_cD_x^{(n)}f(x), ...$$

olacak şekilde elemanları oluşturma her iki tarafta sonsuz olan bir dizi oluşur. Burada mertebesi negatif olanlar integral olarak, c değeri integralin alt sınırıdır. Çift katlı integralde

$$\int_c^x ds_2 \int_c^{s_2} ds_1 = \int_c^x ds_1 \int_{s_1}^x ds_2,$$

integral alma sırasını değiştirme kuralı ve matematiksel induksiyon yöntemini uygulanarak, bu dizinin çoklu integrallerini,

$${}_cD_x^{-n}f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^x (x-s)^{n-1} f(s) ds,$$

Cauchy formülüne ulaşan üstel fonksiyon olan çekirdek ile tekli integrallere dönüştürmek mümkündür. Böylece ${}_cD_x$ operatörü için aşağıdaki özellikler verilebilir:

1. Lineerlik özelliği: a, b sabitler için ${}_cD_x^{-n}[af(x) + bg(x)] = a{}_cD_x^{-n}f(x) + b{}_cD_x^{-n}g(x)$;
2. Argümanın lineerlik özelliği: a, b sabitler için ${}_cD_x^{-n}f(ax+b) = {}^{-n}_{ca+b}D_x^{-n}f(x)$;
3. Mertebe toplama özelliği: $m, n > 0$ için

$${}_cD_x^{-m}{}_cD_x^{-n} = {}_cD_x^{-n}{}_cD_x^{-m} = {}_cD_x^{-m-n};$$

4. Çarpımın integrali (Leibnitz Kuralı):

$${}_cD_x^{-n}[f(x)g(x)] = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l f^{(l)}(x) g^{(-n-l)}(x);$$

5. Sol taraflı ${}_cD_x^{-m}$ integrallerle birlikte sağ taraflı integraller de verilebilir:

$${}_x D_c^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^c (x-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Verilen tanımı ve özellikleri kullanarak kesirli türev ve integrallerin özelliklerine geçiş yapabiliriz.

4.2. Kesirli Mertebeden Türev

Tamsayı mertebeden olmayan integral veya türev kavramına uyan, yeni gösterim ve metodoloji kullanılarak bir çok tanım verildi. Kesirli türev analizinde, sıklıkla kullanılan tanımlar Riemann-Liouville, Caputo ve Grunwald-Letnikov türev formülleridir.

Çok katlı integral kavramını kesirli mertebeden integrale genelleştirmek için

$${}_c D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad \alpha > 0,$$

Cauchy formülünün kesirli şekli kullanılır. Bu integral için integralin temel olan ilk üç özelliklerinin sağlandığı kontrol edilebilir. Ayrıca integralin özelliklerine geçmeden önce Dirichlet formülünü vermek yararlıdır.

Tanım 4.2. (Miller ve Ross, 1993) $h(x, y)$ parçalı sürekli bir fonksiyon ve $n, m > 0$ olsun, o halde Dirichlet formülü

$$\int_0^t (t-x)^{n-1} dx \int_0^x (x-y)^{m-1} h(x, y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{n-1} (x-y)^{m-1} h(x, y) dx, \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $h(x, y) = f(y)g(x)$ ve $g(x) = 1$ ise o zaman (4.2)

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = B(\alpha, \beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy, \quad (4.3)$$

formülüne dönüşür.

Tam olmayan mertebeden integralin argüman lineerlik özelliği herhangi a, b sabitleri ve $\alpha > 0$ için

$${}_c D_x^{-\alpha} f(ax+b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-s)^{\alpha-1} f(as+b) ds = a^{-\alpha} {}_{ca+b} D_x^{-\alpha} f(x),$$

ve lineerlik özelliği

$${}_c D_x^{-\alpha} [af(x) + bg(x)] = a {}_c D_x^{-\alpha} f(x) + b {}_c D_x^{-\alpha} g(x),$$

şeklinde olduğu anlaşılır. Ve en son olarak, mertebe toplama özelliği her $\alpha, \beta > 0$ için (4.2) Dirichlet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} {}_c D_x^{-\alpha} {}_c D_x^{-\beta} &= {}_c D_x^{-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_c^x (x-s)^{\beta-1} f(s) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} \int_c^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_c^x \left(\int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt \right) f(s) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_c^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds = {}_c D_x^{-\alpha-\beta}, \end{aligned}$$

ve hatta

$${}_c D_x^{-\alpha} {}_c D_x^{-\beta} = {}_c D_x^{-\alpha-\beta} = {}_c D_x^{-\beta} {}_c D_x^{-\alpha},$$

elde edilir. Böylece Riemann-Liouville integral tanımını verebiliriz.

Tanım 4.3. (Podlubny, 1999) $\alpha > 0$, c bir sabit ve $f(x)$ bir fonksiyonu için Riemann-Liouville integralı

$${}_c I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.4. (Podlubny, 1999) $f(x)$ bir fonksiyon, c, c' birer sabit ve $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville türevleri sırasıyla

$${}_c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_c^x (x-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad (4.5)$$

$${}_x D_{c'}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^{c'} (s-x)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.5. (Podlubny, 1999) $f(x)$ bir fonksiyon, c, c' birer sabit ve $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, α . mertebeden sol ve sağ Caputo türevleri sırasıyla

$${}_c^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_c^x (x-s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{ds} \right)^n f(s) ds, \quad (4.7)$$

$${}_x^C D_{c'}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^{c'} (s-x)^{n-\alpha-1} \left(-\frac{d}{ds} \right)^n f(s) ds, \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Çoğu zaman pratikte, Riemann-Liouville ve Caputo sol türev kavramları kullanılır. Genel durumda, (4.5) türevi ile verilen bir diferansiyel denklemin çözümü, $x = a$ noktasında en fazla $(1-\alpha)$. derecesinde integral tekilliğini içerebilirken, (4.7) türevin varlığından, bu noktada çözümün sınırlılığını ifade eder.

Bir n tam sayısı için $\alpha = n$ olduğunda, Riemann-Liouville integrali n -katlı tekrarlı integrale denk gelir, ve $\alpha \rightarrow n$ limitine geçerken, D_x^α Riemann-Liouville türevi ve ${}^C D_x^\alpha$ Caputo türevi klasik, tam sayı mertebeden bir türeve geçer.

$f(x), g(x)$ iki sürekli fonksiyon, c sabit ve $\alpha, \beta > 0$ pozitif sayılar iken kesirli türev ve integral aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- Riemann-Liouville ve Caputo türevleri Riemann-Liouville integrali kullanarak sırasıyla

$${}_c D_x^\alpha f(x) = D_x^n {}_c I_x^{n-\alpha} f(x),$$

$${}_c^C D_x^\alpha f(x) = {}_c I_x^{n-\alpha} D_x^n f(x),$$

şeklini alır.

- Lineerlik özelliğini hem Riemann-Liouville, hem de Caputo türevleri sağlıyor ve a, b sabitler için

$${}_c D_x^\alpha [af(x) + bg(x)] = a {}_c D_x^\alpha f(x) + b {}_c D_x^\alpha g(x),$$

ve

$${}_c^C D_x^\alpha [af(x) + bg(x)] = a {}_c^C D_x^\alpha f(x) + b {}_c^C D_x^\alpha g(x),$$

olur.

- Mertebe toplama özellikleri, $m - 1 < \alpha \leq m, n - 1 < \beta \leq n, \alpha + \beta < n$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde olur:

$$- D_x^n {}_c D_x^\alpha f(x) = {}_c D_x^{n+\alpha} f(x) \neq {}_c D_x^\alpha D_x^n f(x),$$

$${}_c^C D_x^\alpha D_x^n f(x) = {}_c^C D_x^{n+\alpha} f(x) \neq D_x^n {}_c^C D_x^\alpha f(x);$$

$$- \beta \geq \alpha \text{ için } {}_c D_x^\alpha {}_c I_x^\beta f(x) = {}_c D_x^\alpha D_x^{-\beta} f(x) = {}_c D_x^{\alpha-\beta} f(x);$$

– Kesirli integralleri için

$${}_c I_x^\alpha [{}_c I_x^\beta f(x)] = {}_c I_x^{\alpha+\beta} f(x) = {}_c I_x^\beta [{}_c I_x^\alpha f(x)]; \quad (4.9)$$

$$- {}_c D_x^\alpha [{}_c I_x^\alpha f(x)] = f(x);$$

$$- f^{(\alpha-k)}(c) = \lim_{x \rightarrow c+} {}_c D_x^{\alpha-k} f(x) \text{ için aşağıdaki eşitlik doğrudur}$$

$${}_c I_x^\alpha {}_c D_x^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-c)^{\alpha-k}}{\Gamma(1-k+\alpha)} f^{(\alpha-k)}(c). \quad (4.10)$$

- Leibnitz kuralı Riemann-Liouville ve Caputo türevler için sırasıyla

$${}_c D_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} ({}_c D_x^{\alpha-l} f(x)) g^{(l)}(x), \quad (4.11)$$

ve

$${}_c^C D_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} ({}_c D_x^{\alpha-l} f(x)) g^{(l)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-c)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1-\alpha)} ((f(x)g(x))^{(i)}(c)), \quad (4.12)$$

şeklinde olur. Ayrıca $\binom{\alpha}{l}$ ifadesi için Gama fonksiyonu kullanılarak,

$$\binom{\alpha}{l} = \frac{(-1)^{l-1} \alpha \Gamma(l-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(l+1)},$$

olur.

- $f(x) = a$ bir sabit fonksiyon için Riemann-Liouville ve Caputo türevleri sırasıyla aşağıdaki ifadelerle eşittir:

$${}_c D_x^\alpha a = \frac{a}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \neq 0,$$

$${}_c^C D_x^\alpha a = 0.$$

- Riemann-Liouville ile Caputo türevlerin arasındaki ilişki, $n-1 < \alpha < n$ ve $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = f(c)$ sonlu limit için

$${}_c^C D_x^\alpha f(x) = {}_c D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-c)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(c), \quad (4.13)$$

eşitliği sağlayacak şekilde olur.

Bazı özelliklerin ispatı aşağıda gibidir.

Teorem 4.1. (Samko vd., 1993) f bir sürekli fonksiyon ve $\alpha, \beta > 0$ olsun. Bu durumda (4.9) ifadesi doğrudur.

İspat: (4.1) Tanımına göre

$${}_c I_x^\alpha [{}_c I_x^\beta f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-s)^{\alpha-1} [{}_c I_x^\beta f(x)]|_{x=s} ds,$$

olur. Bu ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-s)^{\alpha-1} [{}_c I_x^\beta f(s)]|_{x=s} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-s)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_c^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt \right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_c^x (x-s)^{\alpha-1} ds \int_c^s (s-t)^{\beta-1} f(t) dt, \end{aligned}$$

geçişlerini sağlar ve böylece

$${}_c I_x^{\alpha+\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_c^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt = \beta(\alpha, \beta) \int_c^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt,$$

şeklini alıp, (4.2) formülü (4.9) formülünü doğrular.

Teorem 4.2. (Samko vd., 1993) $f(x), g(x)$ ve $D_x f(x), D_x g(x)$, $[0, x]$ aralığı üzerinde sürekli ve $n-1 < \alpha \leq n$ olsun. O halde Caputo türevi için Leibnitz formülü (4.12) eşitlikle verilir.

İspat: Riemann-Liouville ile Caputo türevlerin aralarındaki (4.13) bağlantıyı ve Riemann-Liouville için (4.11) Leibnitz formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}_c^C D_x^\alpha (f(x)g(x)) &= {}_c D_x^\alpha (f(x)g(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-c)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} ((f(x)g(x))^{(k)}(c)) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{l} ({}_c D_x^{\alpha-l} f(x)) g^{(l)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-c)^{i-\alpha}}{\Gamma(i+1-\alpha)} ((f(x)g(x))^{(i)}(c)),
\end{aligned}$$

ifadesi bulunur.

Bundan sonra Riemann-Liouville ile Caputo türevleri ve kesirli integralin alt sınırı $c = 0$ olduğunda sırasıyla D_x^α , ${}_c D_x^\alpha$ ve I_x^α formunda ifade edilecektir.

Örnek 4.1. a bir sabit, ve $f(t) = e^{at}$ olsun. $f(t)$ 'nin $n-1 < \nu \leq n$ olacak şekilde ν . mertebeden Riemann-Liouville integrali aşağıdaki gibi hesaplanır.

$f(t) = e^{at}$ fonksiyonunun kesirli intergali

$$I_t^\nu e^{at} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-x)^{\nu-1} e^{ax} dx,$$

olur. Burada $y = t - x$ dönüşümü yapılırsa, $dx = -dy$, $t > y = t - x > 0$ olur ve

$$I_t^\nu e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu)} \int_0^t y^{\nu-1} e^{-ay} dy,$$

$$\begin{aligned}
I_t^\nu e^{at} &= e^{at} t^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu) t^\nu} \int_0^t y^{\nu-1} e^{-ay} dy = e^{at} t^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu) (at)^\nu} \int_0^t (ay)^{\nu-1} e^{-ay} d(ay) \\
&= e^{at} t^\nu \gamma^*(\nu, at),
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.2. a) $f(t) = t^\mu$ ele alınsın, burada $\mu \geq 0$ ve $0 < \nu < 1$ olsun. Riemann-Liouville türevi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
D_t^\nu t^\mu &= D^1 [I^{1-\nu} t^\mu] = D_t^1 \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma((\mu-\nu+1)+1)} t^{\mu-\nu+1} \right] \\
&= (\mu-\nu+1) \frac{\Gamma(\mu+1)}{(\mu-\nu+1)\Gamma(\mu-\nu+1)} t^{\mu-\nu}.
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$D_t^\nu t^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \nu + 1)} t^{\mu - \nu}, \quad \mu \geq 0 \quad \text{ve} \quad 0 < \nu < 1.$$

b) $f(t) = t^\mu$ ele alınsın, burada $\mu \geq 0$ ve $0 < \nu < 1$ olsun. $f(t)$ 'nin Caputo türevi aşağıdaki gibi olur.

$${}^C D_t^\nu t^\mu = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} \mu \tau^{\mu - 1} d\tau,$$

$\tau = \lambda t$ dönüşümü yapıldıktan sonra

$${}^C D_t^\nu t^\mu = \frac{\mu}{\Gamma(1 - \nu)} t^{\mu - \nu} B(\mu, 1 - \nu) = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \nu + 1)} t^{\mu - \nu},$$

olur. Böylece $f(t) = t^\mu$ fonksiyonunun Riemann-Liouville ve Caputo türevi eşit olduğu görülür. Ancak her fonksiyonun Riemann-Liouville ve Caputo türevi eşit değildir.

Tamsayı mertebeden olan klasik türevden farklı olarak, kesirli türevlerin özdeş olmayan birçok tanımı vardır. Bu ise, tanımları benzer olup, ancak özelliklerine göre farklı KmDD'leri verir.

4.3. Kesirli Mertebeden Türev için Simetri Analizi

Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin (KmKDD) analitik çözüm yöntemleri hala iyi gelişmemiştir. Denklemlerin çözülmesine yönelik mevcut yaklaşımların çoğu, sadece belirli bir lineer denklem sınıfı ve lineer olmayan KmKDD'ler için analitik çözümler elde etmeyi mümkün kılar. Lineer denklemlerin çözümlerini araştırmak için, Laplace ve Mellin integral dönüşümleri sıklıkla kullanılır. Bu uygulamaların bazıları kitaplarda (Samko vd., 1993; Podluny, 1999; Kilbas vd., 2006) ve çok sayıda makalede açıklanmaktadır (Özkan ve Kurt, 2018; Kexue ve Jigen, 2011; Yokuş ve Kaya, 2017). Tamsayı türevleri ile beraber kesirli türevli denklemlerin kesin çözümlerini oluşturmak için etkili yaklaşımlardan biri de grup analiz yöntemlerinin kullanılmasıdır. Bu yöntemi bu çalışmada kullanacağımız kadarıyla detaylıca verelim.

Tek ε parametrelili

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t + \varepsilon\tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{x} &= x + \varepsilon\xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u} &= u + \varepsilon\eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{4.14}$$

bir Lie grup dönüşümünü ele alalım. Lie'nin geleneksel sonsuz küçük yaklaşımını kullanarak, (4.14) dönüşümleri için, sonsuz küçük operatör yazılabilir. Ayrıca tamsayı ve kesirli türevlerine genişletilebilir.

Bunun için bazı yardımcı araca ihtiyaç vardır. A , bir 2×2 matris olup A^{-1} matrisi de mevcut olsun ve

$$A = \begin{pmatrix} D_x \bar{x} & D_x \bar{t} \\ D_t \bar{x} & D_t \bar{t} \end{pmatrix},$$

ifadesi ile verilsin (Bluman ve Kumei, 1996). A matrisindeki $\bar{x}$ ve $\bar{t}$ dönüşüm değişkenlerinin tam türevi, (4.14) dönüşümleri göz önüne alınarak

$$\begin{pmatrix} D_x \bar{x} & D_x \bar{t} \\ D_t \bar{x} & D_t \bar{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x[x + \varepsilon\xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2)] & D_x[t + \varepsilon\tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2)] \\ D_t[x + \varepsilon\xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2)] & D_t[t + \varepsilon\tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2)] \end{pmatrix},$$

şeklinde bulunur. Bu ise

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon D_x \xi + O(\varepsilon^2) & \varepsilon D_x \tau + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon D_t \xi + O(\varepsilon^2) & 1 + \varepsilon D_t \tau + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} = I + \varepsilon B + O(\varepsilon^2),$$

geçişlerini sağlar. Burada $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} D_x \xi & D_x \tau \\ D_t \xi & D_t \tau \end{pmatrix}$ şeklindeki bir matristir. O halde

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{1 + \varepsilon D_x \xi + \varepsilon D_t \tau + O(\varepsilon^2)} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon D_t \tau + O(\varepsilon^2) & -(\varepsilon D_x \tau + O(\varepsilon^2)) \\ -(\varepsilon D_t \xi + O(\varepsilon^2)) & 1 + \varepsilon D_x \xi + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varepsilon D_x \xi}{1 + \varepsilon D_x \xi + \varepsilon D_t \tau + O(\varepsilon^2)} & -\frac{\varepsilon D_x \tau + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon D_x \xi + \varepsilon D_t \tau + O(\varepsilon^2)} \\ -\frac{\varepsilon D_t \xi + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon D_x \xi + \varepsilon D_t \tau + O(\varepsilon^2)} & 1 - \frac{\varepsilon D_t \tau}{1 + \varepsilon D_x \xi + \varepsilon D_t \tau + O(\varepsilon^2)} \end{pmatrix} \\
&= I - \begin{pmatrix} \varepsilon D_x \xi + O(\varepsilon^2) & \varepsilon D_x \tau + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon D_t \xi + O(\varepsilon^2) & \varepsilon D_t \tau + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

olup $A^{-1} = I - \varepsilon B + O(\varepsilon^2)$ eşitliğini verir.

Bir $u(t, x)$ fonksiyonunun $\frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u$ ve $\frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u$ kısmi türevlerini (4.14) dönüşümünden elde etmek her birinin tam türevi aşağıdaki eşitliklerdeki gibi olur.

$$\begin{pmatrix} D_x[u + \varepsilon \eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2)] \\ D_t[u + \varepsilon \eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x \bar{u} \\ D_t \bar{u} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} D_{\bar{x}} \bar{u} \\ D_{\bar{t}} \bar{u} \end{pmatrix},$$

son eşitliliğin her iki tarafını soldan A^{-1} matrisle çarparak

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{\bar{x}} \\ \bar{u}_{\bar{t}} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} D_x \bar{u} \\ D_t \bar{u} \end{pmatrix},$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{\bar{x}} \\ \bar{u}_{\bar{t}} \end{pmatrix} = (I - \varepsilon B) \begin{pmatrix} u_x + \varepsilon D_x \eta \\ u_t + \varepsilon D_t \eta \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon D_x \xi & -\varepsilon D_x \tau \\ -\varepsilon D_t \xi & 1 - \varepsilon D_t \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x + \varepsilon D_x \eta \\ u_t + \varepsilon D_t \eta \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \\
&= \begin{pmatrix} u_x + \varepsilon(D_x \eta - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau) + O(\varepsilon^2) \\ u_t + \varepsilon(D_t \eta - u_x D_t \xi - u_t D_t \tau) + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + \varepsilon \eta_1^x + O(\varepsilon^2) \\ u_t + \varepsilon \eta_1^t + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Yani $\begin{pmatrix} \eta_1^x \\ \eta_1^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x \eta - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau \\ D_t \eta - u_x D_t \xi - u_t D_t \tau \end{pmatrix}$ şeklinde

$$\bar{t} = t + \varepsilon \tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\bar{x} = x + \varepsilon \xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\bar{u} = u + \varepsilon \eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2),$$

$$\bar{u}_{\bar{x}} = u_x + \varepsilon \eta_1^x + O(\varepsilon^2),$$

$$\bar{u}_{\bar{t}} = u_t + \varepsilon \eta_1^t + O(\varepsilon^2),$$

Lie dönüşümünün gösterimi genişler. Bir $s \in \mathbb{N}$ için u fonksiyonunun $\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = \partial_x^i u$, $i = 1, 2, \dots, s$ daha yüksek mertebeden kısmi türevleri için (4.14) dönüşümü η_i^x 'leri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{x}} \bar{u} &= \partial_x u + \varepsilon \eta_1^x + O(\varepsilon^2), \\
\partial_{\bar{x}}^2 \bar{u} &= \partial_x^2 u + \varepsilon \eta_2^x + O(\varepsilon^2), \\
&\vdots \\
\partial_{\bar{x}}^s \bar{u} &= \partial_x^s u + \varepsilon \eta_s^x + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Burada η_j^x , $j > 1$ için benzer hesaplamalarla elde edilip

$$\begin{aligned}
\eta_1^x &= D_x \eta - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau, \\
\eta_2^x &= D_x \eta_1^x - u_{xx} D_x \xi - u_{xt} D_x \tau, \\
&\vdots \\
\eta_s^x &= D_x \eta_{s-1}^x - \partial_x^s u D_x \xi - \partial_x^{s-1} u_t D_x \tau,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

genel formda yazılır.

Şimdi $n - 1 < \alpha < n$ için $\partial_x^\alpha u$ kesirli türevi düşünelim. Grup analizi yöntemlerinin bir fonksiyonun kesirli türevlerini içeren kesirli denklemler sınıfına genişletilmesi, grubun sonsuz küçük operatörünün kesirli integrallere ve kesirli türevlere devam etmesi için η_x^α 'nin formüllerin oluşturulmasına dayanır. Bu formüller Gazizov vd. (2012) tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. η_x^α bir Riemann-Liouville ve Caputo türev için iki farklı ifade olacağına dikkat etmek gerekir.

Karşılaşılan problemlerde çoğunlukla t zaman değişkenine göre kesirli türev alındığı için kesirli türevleri t 'ye göre düşünülmesinde yarar vardır. İlk önce t 'ye göre Caputo türevi

$$\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial t^\alpha} = \frac{{}^C \partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varepsilon^C \eta_\alpha^t + O(\varepsilon^2), \quad (4.17)$$

ile ilişkili genişletilmiş sonsuz küçük

$${}^C \eta_t^\alpha = {}^C D_t^\alpha(\eta) + \xi {}^C D_t^\alpha(u_x) - {}^C D_t^\alpha(\xi u_x) + \tau {}^C D_t^\alpha(u_t) - {}^C D_t^\alpha(\tau u_t), \quad (4.18)$$

bir eşitlik şeklinde olanı göz önüne alalım (Gazizov vd., 2012).

Caputo türev için (4.12) Leibnitz kuralı ile

$$\xi {}^C D_t^\alpha(u_x) - {}^C D_t^\alpha(\xi u_x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} I_t^{n-\alpha}(u_x) D_t^n(\xi) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\xi u_x)^{(i)}(0)}{\Gamma(i - \alpha + 1)} t^{i-\alpha},$$

ve

$$\tau {}^C D_t^\alpha(u_t) - {}^C D_t^\alpha(\tau u_t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} I_t^{n-\alpha}(u_t) D_t^n(\tau) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\tau u_t)^{(i)}(0)}{\Gamma(i - \alpha + 1)} t^{i-\alpha},$$

ifadeleri doğrulanır. Böylece

$$\begin{aligned}
{}^C\eta_t^\alpha &= D_t^\alpha(\eta) + \eta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} I_t^{n-\alpha}(u_x) D_t^n(\xi) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\xi u_x + \tau u_t)^{(i)}(0)}{\Gamma(i - \alpha + 1)} t^{i-\alpha} \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} I_t^{n-\alpha}(u) D_t^{n+1}(\tau) - \alpha D_t(\tau) D_t^\alpha(u),
\end{aligned}$$

olur. Devamında

$$\frac{d^m f(g(t))}{dt^m} = \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{1}{k!} (-g(t))^r \frac{d^m}{dt^m} (g(t)^{k-r}) \frac{d^k f(g)}{dg^k},$$

zincir kuralının (Oldham ve Spanier, 1974)

$$\begin{aligned}
\frac{d^\alpha f(t, g(t))}{dt^\alpha} &= \\
&\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} \binom{\alpha}{l} \binom{l}{m} \binom{k}{r} \frac{1}{k!} \frac{t^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} (-g(t))^r \frac{d^m}{dt^m} (g(t)^{k-r}) \frac{\partial^{l-m+k} f(g)}{\partial t^{l-m} \partial g^k},
\end{aligned}$$

genelleştirilmiş bir formunu kullanarak

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^{n-\alpha}(\eta)^{(j)}(0)}{\Gamma(j+1-\alpha)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^{(n-\alpha)}}{\Gamma(j+1-\alpha)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} \binom{\alpha}{l} \binom{l}{m} \binom{k}{r} \\
&\times \frac{1}{k!} \frac{t^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} \left((-u)^r \frac{d^j}{dt^j} (u^{k-r}) \frac{\partial^{l-j+k} \eta}{\partial t^{l-j} \partial u^k} \right) (0),
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir ve bu ${}^C\eta_t^\alpha$ için

$$\begin{aligned}
{}^C\eta_t^\alpha &= \frac{{}^C\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} + (\eta_u - \alpha(\tau_t + u_t \tau_u)) \frac{{}^C\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{{}^C\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} \\
&- \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) I_t^{n-\alpha}(u_x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{n} \frac{\partial^n \eta_u}{\partial t^n} - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1} \tau \right] I_t^{n-\alpha} u \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\xi u_x)^{(i)}(0)}{\Gamma(i-\alpha+1)} t^{i-\alpha} + \mu,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olur ve burada

$$\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \sum_{k=2}^m \sum_{r=0}^{k-1} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{m} \binom{k}{r} \frac{1}{k!} \frac{t^{n-\alpha}(-u)^r}{\Gamma(n+1-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial t^m} (u^{k-r}) \frac{\partial^{n-m+k} \eta}{\partial t^{n-m} \partial u^k}, \quad (4.20)$$

ile verilir.

Riemann-Liouville türev için Lie grup dönüşümü

$$\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varepsilon \eta_t^\alpha + O(\varepsilon^2), \quad (4.21)$$

şeklinde olup, burada η_α^t

$$\eta_t^\alpha = D_t^\alpha(\eta) + \xi D_t^\alpha(u_x) - D_t^\alpha(\xi u_x) + D_t^\alpha(u D_t \tau) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1} u,$$

formunda elde edilmiştir (Gazizov vd., 2012). Hesaplamalar Caputo türev için yapılan hesaplamalara benzerdir. (4.11) Leibnitz formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \eta_t^\alpha &= \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} + (\eta_u - \alpha(\tau_t + u_t \tau_u)) \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (D_t^n \xi) (D_t^{\alpha-n} u_x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{n} \frac{\partial^n \eta_u}{\partial t^n} - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{\alpha+1} \tau \right] D^{\alpha-n} u - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + \mu, \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir.

Sonuç olarak simetri grubunu basitçe izah etmek gerekirse

$$F(t, x, u(t, x), {}^C D_t^\alpha u(t, x), \partial_x u(t, x), \partial_x^2 u(t, x), \dots, \partial_x^s u(t, x)) = 0, \quad (4.23)$$

bir KmKDD'ye (4.14) uygulandığında, karşılık gelen sonsuz küçük üretçi aşağıdaki formda

$$X = \xi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.24)$$

olup, genel olarak, diferansiyel denklemlerin değişmezliğinin bir genelleştirilmiş tanımını aşağıda gibi olur.

Tanım 4.6. (4.23) denklemi için (4.24) sonsuz küçük üretçi ile (4.14) simetri altında $u = v(t, x)$ bir değişmez çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul:

- $u = v(t, x)$ çözümü (4.23) denklemi sağlıyor olmasıdır,
- $u = v(t, x)$ çözümü X altında değişmez olmasıdır.

Hakikaten tanımda belirtildiği gibi, (4.23) denklem için X üretci altında $u = v(t, x)$ 'nin bir değişmez çözüm olması için gerek ve yeter koşul

- $u = v(t, x)$ için $X(u - v(t, x)) = 0$ olacak şekilde $\xi(t, x, v(t, x)) \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + \tau(t, x, v(t, x)) \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \eta(t, x, v(t, x))$, ifadesi sağlanır,
- $u = v(t, x)$ iken $F(x, t, v(t, x), {}^C D_t^\alpha v(t, x), \partial_x v(t, x), \dots, \partial_x^s v(t, x)) = 0$ 'dır.

Kesirli türevler için Lie grubu yönteminin uygulaması, bir sonraki lemmayı doğrular.

Lemma 4.3. (4.23) denklemi (4.24) sonsuz küçük üretci ile (4.14) Lie simetri dönüşümü altında değişmez olsun. Ayrıca (4.23)'te t 'ye göre u 'nun ikinci ve daha yüksek mertebeden türevi bulunmuyorsa, o zaman $A(t, x)$ ve $B(t, x)$ iki keyfi fonksiyon için $\eta = A(t, x)u + B(t, x)$ şeklini alır.

İspat: Lemma koşulu u 'nun t 'ye göre sadece kesirli türevi vardır. (4.14) dönüşümü uyguladıktan sonra ${}^C D_t^\alpha \bar{u} = {}^C D_t^\alpha u + \varepsilon {}^C D_t^\alpha \eta + O(\varepsilon^2)$ elde edilir. ${}^C D_t^\alpha \eta$ 'nin ifadesi genişletilerek (4.20) ile karşılaştırılır. Burada $k = 2$ iken

$$\mu = \frac{1}{2!} \frac{t^{2-\alpha}(-u)}{\Gamma(3-\alpha)} u_{tt} \eta_{uu},$$

olur ve denklemde olduğu gibi u_{tt} ve u ile t 'ye göre yüksek mertebeli turevleri olmadığından $\eta_{uu} = 0$ 'dır. Böylece, η sadece u 'ya lineer olarak bağıdır. İki kez integral alındıktan sonra, $\eta = A(t, x)u + B(t, x)$ elde edilir.

5. BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Diferansiyel denklemler, matematiğin çeşitli alanlarında ve özelde çeşitli uygulama alanlarında ortaya çıkmıştır. Diferansiyel denklem, bilinmeyen bir fonksiyonun bir türev veya diferansiyel operatörünü içeren bir denklemdir. Örneğin,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (5.1)$$

x bağımsız değişkenli ve $y(x)$ bağımlı değişkenli n . mertebeden bir adi diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemin çözümü, denklemi sağlayan, n -kez türevlenebilen bir $h(x)$ fonksiyonudur.

Diferansiyel denklem, bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa bu denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir. $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ ve $u(x, y)$ iki bağımsız değişkenli fonksiyonu olmak üzere, ikinci mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklem

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y), \quad (5.2)$$

şeklinde yazılabilir. $G(x, y) = 0$ ise (5.2) denklemi

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0, \quad (5.3)$$

homojen denkleme dönüşür. (5.3) kısmi türevli diferansiyel denklemin parabolik, eliptik ve hiperbolik olmak üzere üç farklı tipi vardır. Bunlar (x, y) değişkenlerine ve $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ göre

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

şeklinde ikinci dereceden cebirsel denklemin diskriminantına göre

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad ise \quad \begin{cases} \Delta < 0, & \text{eliptik} \\ \Delta = 0, & \text{parabolik} \\ \Delta > 0, & \text{hiperbolik} \end{cases}$$

olacak şekilde belirlenir. Hiperbolik diferansiyel denklemler salınım süreçlerini tanımlar. Parabolik diferansiyel denklemler ısı ve madde transferi süreçlerini tanımlar. Eliptik tipteki diferansiyel denklemler zamandan bağımsız durağan süreçleri tanımlar.

Adi ve kısmi diferansiyel denklemler çeşitli tipte sınır koşullarla birlikte verilir. Bir diferansiyel denklem için başlangıç koşulu verilmişse Cauchy problemi, sınır koşulu u cinsinden verilmişse Dirichlet tipi sınır koşulu olarak, u 'nun türevinin alanın sınırları için değerleri belirtilmişse Neumann tipi sınır koşulu olarak adlandırılır. u ve u 'nun türevi ile birlikte verildiği takdirde Robin sınır koşulu söz konusu olur. Ayrıca bunlar

- $u(0, x) = \phi(x)$, Cauchy problemi,
- $\begin{cases} u(x, a) = \psi_1(t) \\ u(b, y) = \psi_2(t) \end{cases}$, Dirichlet problemi,
- $u_x(a, y) = \varphi(t)$, Neumann problemi,
- $cu_x(a, y) + du(a, y) = \varpi(t)$, Robin problemi,

olarak tanımlanır. Parabolik denklemler t zamanına göre birinci türevi içerir, bu nedenle çözüm için bir başlangıç koşulu uygulanır. Eliptik tip bir denklemin çözümü t zamanına bağlı değildir, bu nedenle başlangıç koşulu ortaya çıkmaz. Lineer sınır koşulları dikkate alındığında bölgenin sınırındaki aranan çözüm, çözümün durumunu belirler. Örneğin, bir ipin titreşim süreci incelenirse, uçları sabitlenebilir bu Dirichlet koşulu verir, uçları serbest olabilir bu Neumann koşulu verir veya esnek olarak sabitlenebilir bu ise Robin koşulu verir. Sınır koşulları daha karmaşık olup t zamanına göre türevleri içerebilir. Lineer olmayan sınır koşulları daha da karmaşık hale gelir.

X ve Y iki normlu uzay ve $T : X \mapsto Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, o zaman, $Tx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır:

1. Problemin bir çözümü var; yani her $y \in Y$ için $Tx = y$ olmak üzere en az bir $x \in X$ vardır.
2. Problemin çözümü tektir; yani her $y \in Y$ için $Tx = y$ olmak üzere en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Problemin çözümü karardlıdır. Yani x çözümü sürekli olarak daima y 'ye bağılıdır ve $n \rightarrow \infty$ iken $Kx_n \mapsto Kx$ olacak şekilde her $x_n \in X$ dizisi için $x_n \rightarrow x$ olmalıdır.

Ek koşullar belirlenirken, bu koşulların bir çözümün varlığını (problem fazla koşul ile geçersiz kılınmamalıdır) ve çözümün tekliğini (problem yeteri kadar belirlenmelidir) sağlaması gerektiğini unutmamak gerekir. Ayrıca, çözümün karardlılık koşulunun yerine getirilmesi de tercih edilir (bu her zaman böyle değildir).

5.1. Başlangıç ve Sınır Değer Problemlerin Simetri Analizi

Lie simetri analizi, diferansiyel denklemlerde kesin çözümler bulmak için en sık kullanılan yöntemlerden biri olmasına rağmen, başlangıç ve sınır problemlerini çözmek için çok az kullanılmıştır. Bunun nedeni, verilen başlangıç ve sınır koşulları herhangi bir dönüşüm altında değişmez olmamasıdır (Bluman ve Kumei, 1996). Böylece, simetri dönüşümü uygulayarak ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklem için değişmeyen bir çözüm, simetri dönüşümü tüm sınır koşullarını ve sınır değer probleminin alanını değişmez bıraktığında verilen bir sınır değer problemini çözer.

Bluman ve Kumei çözülebilecek bazı başlangıç ve sınır değer problemleri için başlangıç ve sınır koşullarının Lie simetri tanımını vermiştir. Bluman, kısmi diferansiyel denklemi, sonlu değerler olan x ve t sınır ve başlangıç koşullarını incelemiştir. Daha sonra Cherniha ve Kovalenko (2011, 2012), Bluman'ın tanımını x ve t sınır ve başlangıç koşullarının sonsuz değerleri için genelleştirmiştir.

Bluman'ın tanımına göre başlangıç ve sınır değer kısmi diferansiyel denklemin çözümünü bulmak için, simetri dönüşümünü kısmi diferansiyel denklem ile birlikte başlangıç ve sınır koşullarına da uygulamak gerekir.

Böylece Ω bölgesinde tanımlı

$$u_t = F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (5.4)$$

$$d_a(t, x) = 0 : B_a\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}\right) = 0, \quad a = 1, \dots, p, \quad (5.5)$$

sınır değer problemi tarafından X Lie simetri olduğunu kabul edelim. Burada $d_a(x, t)$ üzerinde olan $B_a(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}})$ sınır koşullarıdır. Yukarıdaki sınır değer probleminin tek bir çözümü olduğunu varsayalım.

Tanım 5.1. (Bluman'ın tanımı) (3.5) formunda olan X simetri, (5.4) ile (5.5) sınır değer problemini sağlar, eğer,

- Her $u_t = F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k})$ için $X^{(k)}(u_t - F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k})) = 0$,
- $d_a(x, t) = 0, a = 1, \dots, p$ için $X d_a(x, t) = 0$,
- $d_a(x, t) = 0, a = 1, \dots, p$ üzerinde her $B_a(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}) = 0$ için $X^{(k-1)} B_a(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}) = 0$.

Böylece simetri yöntemi çözüm kümesini araştırmasında verilen başlangıç ve sınır değer koşulları ile kısıtlanmıyor.

Biz ise bu çalışmamızda Bluman'ın kesirli olmayan diferansiyel denklemler için verdiği teoriyi Caputo türevi içeren KmKDD'lere genişlettik. Bir Ω bölgesinde tanımlanmış

$${}^C D_t^\alpha u = g\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right), \quad (x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (5.6)$$

$${}^C d_a(x, t) = 0 : {}^C B_a\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}\right) = 0, \quad a = 1, \dots, p \quad (5.7)$$

KmKDD için sınır değer problemini düşünelim. Burada ${}^C B_a(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}})$, ${}^C d_a(x, t)$ üzerinde başlangıç koşuludur. (5.6) ve (5.7) sınır değer probleminin tek bir çözümü olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 5.2. (3.5) formunda olan X simetri (5.6) ve (5.7) sınır değer probleminin değişmezliğini sağlar. Eğer,

- ${}^C D_t^\alpha u = g(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k})$ için $X^{(k)}({}^C D_t^\alpha u - g(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k})) = 0$,
- ${}^C d_a(x, t) = 0, a = 1, \dots, p$ için $X^C d_a(x, t) = 0$,
- ${}^C d_a(x, t) = 0, a = 1, \dots, p$ üzerinde ${}^C B_a(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}) = 0$ için $X^{(k-1)} {}^C B_a(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}) = 0$.

Teorem 5.1. $u = \nu(t, x)$ için (5.6) bir değişmez çözüm olması gerek ve yeter koşul X sonsuz küçük üreticine sahip ve $\nu(t, x)$ eğrisinin aşağıdaki eşitliği sağlamasıdır:

$$\eta(t, x, \nu(t, x)) - \xi(t, x, \nu(t, x)) - \tau(t, x, \nu(t, x)) {}^C D_t^{1-\alpha} g\left(x, \nu(t, x), \frac{\partial \nu(t, x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k \nu(t, x)}{\partial x^k}\right) = 0. \quad (5.8)$$

İspat: Eğer $X(u - \nu(t, x)) = 0$ ise, $u = \nu(t, x)$ çözüm yüzeyi olarak (5.6) için değişmezdir. Yani

$$\begin{aligned} 0 &= X(u - \nu(t, x)) = \left(\xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \right) (u - \nu(t, x)) \\ &= \eta(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial u} - \xi(x, t, u) \frac{\partial \nu(t, x)}{\partial x} - \tau(x, t, u) \frac{\partial \nu(t, x)}{\partial t} \\ &= \eta(x, t, \nu(t, x)) - \xi(x, t, \nu(t, x)) \frac{\partial \nu(t, x)}{\partial x} - \tau(x, t, \nu(t, x)) \frac{\partial \nu(t, x)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Böylece $u = \nu(t, x)$ ise $u_t = \frac{\partial \nu(t, x)}{\partial t}$ olur. ${}^C D_t^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t)$ formunda olan Caputo türevin özelliğine göre $u_t = {}^C D_t^{1-\alpha} g(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k})$ olur ve

$$\begin{aligned} &\eta(x, t, \nu(t, x)) - \xi(x, t, \nu(t, x)) \frac{\partial \nu(t, x)}{\partial x} - \\ &\tau(x, t, \nu(t, x)) {}^C D_t^{1-\alpha} g(x, \nu(t, x), \frac{\partial \nu(t, x)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k \nu(t, x)}{\partial x^k}) = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

İspatladığımız teorem Riemann-Liouville türev için geçerli değildir. Çünkü Riemann-Liouville türevi için $D_t^\alpha f(t) \neq I^{n-\alpha} D^n f(t)$ 'dir.

Verdiğimiz genelleştirilmiş tanım ile ispatladığımız teoremi kullanarak kesirli türev içeren bazı kısmi diferansiyel denklemlerin simetri analizini verelim. Ama önce sınır değer problemler için varlık ve teklik teorisine göz atalım.

5.2. Başlangıç ve Sınır Değer Problem için Varlık ve Teklik Kavramı

n . mertebeden (5.1) diferansiyel denklem, genel olarak, sonsuz sayıda çözüme sahiptir. Denklemin tek çözümünü belirlemek için, başlangıç koşullarını vermek yeterlidir. Böylece

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), & x \geq x_0 \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \vdots \\ y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}, \end{cases}$$

şeklinde olan Cauchy problemi elde edilir. Diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği birçok çalışmanın konusu olmuştur. Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği üzerine aşağıdaki teorem geçerlidir.

Tanım 5.3. $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay için $T : N \mapsto N$ dönüşümü Lipschitz koşulu olarak adlandırılır ve $K > 0$ bir Lipschitz sabiti mevcut olup her $x_1, x_2 \in N$ için

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq K \|x_1 - x_2\|,$$

eşitsizliği sağlanılır.

Bu duruma Lipschitz koşulu denir.

Teorem 5.2. (Elsgolts ve Norkin, 1973) $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ fonksiyonu, merkezi (x_0, y_0) noktasında olan düzgün kapalı bir $D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b; a, b \in \mathbb{R}\}$ bölgesinde sürekli ve tanımlı bir fonksiyon olup

$$|f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})| \leq K \left(\sum_{i=0}^{n-1} |y_1^{(i)} - y_0^{(i)}| \right),$$

Lipschitz koşulunu doğruluyor ise, $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ denkleminin $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ koşullarını sağlayan bir $y = h(x)$ çözümü vardır ve o çözüm tektir. Burada K bir sonlu sabittir. Ayrıca bu çözüm

$$H < \min \left(a, \frac{b}{L}, \frac{1}{K} \right), \quad L = \max_D f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

olacak şekilde $|x - x_0| \leq H$ için mevcuttur.

Burada $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)}$ için (5.1) denklemini sağlayacak olan aranan $y = h(x)$ çözümü $|x - x_0| \leq a$ için var olduğu iddia edilemez. Çünkü integral eğrisi $y = h(x)$, $|x_1 - x_0| \leq a$ iken $x = x_1$ bir değeri için üst veya alt kenarları $y = y_0 \pm b$ üzerinden dikdörtgen D 'den dışarı çıkabilir ve daha sonra $x_1 > x_0$ ($x_1 < x_0$) için $x > x_1$ ($x < x_1$) iken çözüm tanımlanmamış olabilir.

Genel durumda kısmi diferansiyel denklemin çözümünün varlığı ve tekliği sorusu tamamen çözülememiştir. Bir kısmi diferansiyel denklem için problemin çözümünün varlığı ve tekliğinin araştırılması, enerji integrali veya maksimum yöntemi kullanılarak yapılabilir. Toplam enerji ifadesinin kullanımına dayanan teklik teoreminin ispat yöntemi, matematiksel fiziğin çeşitli alanlarındaki teklik teoremlerinin ispatında yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, dalga denklemi için başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün teklik ispatı aşağıda gibi olur.

Teorem 5.3. (Tikhonov ve Samarskiy, 1963) $D = \{(t, x) : 0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$ üzerinde tanımlı

$$p(x)u_{tt} - (k(x)u_x)_x = f(t, x), \quad p(x) > 0, \quad k(x) > 0 \text{ ve } t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (5.9)$$

denklemini ve

$$\begin{cases} u(0, x) = \phi(x), & u_t(0, x) = \psi(x), \\ u(t, 0) = \gamma_1(x), & u(t, l) = \gamma_2(x), \end{cases}$$

başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan tek bir $u(t, x)$ fonksiyonu vardır eğer,

1. $u(t, x)$ fonksiyonu ve (5.9) denklemin içerdığı bu fonksiyonun türevleri ve u_{xt} türevi $t \geq 0$ iken $0 \leq x \leq l$ üzerinde sürekli.

2. $p(x)$, $k(x)$ fonksiyon katsayıları $0 \leq x \leq l$ üzerinde sürekli ise.

İspat: Bu problemin $u_1(t, x)$ ve $u_2(t, x)$, $v(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$ olacak şekilde iki çözümü olduğunu varsayalım. $v(t, x)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} pv_{tt} - (kv_x)_x = 0, \\ v(0, x) = 0, \quad v_t(0, x) = 0, \\ v(t, 0) = 0, \quad v(t, l) = 0, \end{cases}$$

denklemini ile başlangıç ve sınır koşullarını ve buna ilaveten teoremin 1. koşulunu sağlıyor. $v(t, x) = 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (k(v_x)^2 + p(v_t)^2) dx,$$

t zamanındaki ipin toplam enerjisi olan enerji integrali göz önüne alalım. $E(t)$ fonksiyonu t 'ye bağlı olmadığını gösterelim. $E(t)$ 'nin t 'ye göre türevi alınır

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (kv_x v_{xt} + pv_t v_{tt}) dx,$$

elde edilir. Şimdi kısmi integral yöntemi uygulandığında

$$\int_0^l kv_x v_{xt} dx = (kv_x v_t)|_0^l - \int_0^l v_t (kv_x)_x dx,$$

olur ve sınır koşullarını kullanarak

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (pv_t v_{tt} - v_t (kv_x)_x) dx = \int_0^l v_t (pv_{tt} - (kv_x)_x) dx = 0,$$

elde edilir, bu ise $E(t) = c$ olur ve burada c bir sabittir. Başlangıç koşullarını kullanarak

$$c = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l (k(v_x)^2 + p(v_t)^2)|_{t=0} dx = 0,$$

geçiş sağlanır. Bu eşitliği ve $k(x) > 0$ ile $p(x) > 0$ göz önüne alarak $v_x(t, x) \equiv 0$, $v_t(t, x) \equiv 0$ olduğu elde edilir. Yani $v(t, x) = c'$, olarak bir sabite eşittir. Başlangıç koşullu ise bize $v(0, x) = c' = 0$ eşitliğini verir. Böylece $v(t, x) = 0$ olduğu ortaya çıkar. Dolayısıyla, teoremin koşullarını sağlayan $u_1(t, x)$ ve $u_2(t, x)$ iki fonksiyon varsa, o zaman onlar $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$ şeklindedir.

Bir sınır değer problemi için çözümün varlığını ve tekliğini kanıtlamak için yaygın olarak kullanılan bir başka yöntem Banach sabit nokta teoremidir. Banach'ın Büzülme İlkesi olarak bilinen sabit nokta teorisinin ana sonucu, Banach tarafından 1922'de tanıtıldı.

Tanım 5.4. (Reed, 1980) N bir boş olmayan küme olsun ve $(N, \| \cdot \|)$ normlu uzay üzerinde $T : N \mapsto N$ bir dönüşüm olsun. $x^* \in N$ olacak şekilde bir nokta için eğer $T(x^*) = x^*$ ise x^* , T 'nin sabit noktası olarak adlandırılır.

Tanım 5.5. (Reed, 1980) $T : N \mapsto N$ dönüşümü için eğer her $x_1, x_2 \in N$ için

$$\| T(x_1) - T(x_2) \| \leq c \| x_1 - x_2 \|,$$

ve $c < 1$ olacak şekilde bir sayı varsa T dönüşümüne bir büzülme dönüşümü denir.

Teorem 5.4. (Banach sabit nokta teoremi; Banach, 1922) $(N, \| \cdot \|)$ tam normlu bir uzay olsun ve $T : N \mapsto N$ bir büzülme dönüşümü olsun, öyle ki $0 \leq c < 1$ bir sabit ve her $x_1, x_2 \in N$ için

$$\| Tx_1 - Tx_2 \| \leq c \| x_1 - x_2 \|,$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman T tek bir sabit noktaya sahiptir.

KmKDD için başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini incelemek için, sabit nokta teorisine dayanan bir yöntemi kullanacağız.

Kilbas vd. (Samko vd., 1993), tam sayı mertebeli türevden diferansiyel denklemler için Cauchy problemine karşılık gelen sonuçlara göre toplanabilir fonksiyonların ve sürekli fonksiyonların uzayında,

$$\begin{cases} {}_c D_x^\alpha y(x) = f(x, y(x)), & \alpha > 0, x > c, \\ {}_c D_x^{\alpha-k} y(x)|_{x=c} = b_k, & b_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n = [\alpha] + 1, \end{cases} \quad (5.10)$$

KmDD'ler için Cauchy tipi problemlerin çözümlerinin varlığını ve tekliğini ispatlıyor.

Teorem 5.5. (Samko vd., 1993) $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ olsun ve $f(x, y) \in C_{n-\alpha}[c, d]$ olmak üzere $f(x, y) : [c, d] \times Y \mapsto Y$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|,$$

şeklinde olan Lipschitz koşulu karşılansın. O zaman (5.10) Cauchy tipi bir problem için $h(x) \in C_{n-\alpha}^\alpha[c, d]$ olmak üzere tek bir $y = h(x)$ çözümü vardır.

Teoremin ispatı, diferansiyel denkleme karşılık gelen

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{\Gamma(\alpha - i + 1)} (x - c)^{\alpha-i} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x \frac{f(t, y(t))}{(x - t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > c,$$

ikinci tipteki Volterra integral denkleme indirgenmesi ve Banach sabit nokta teoremi fikrine dayanmaktadır. Belirtilen indirgeme, ${}_c I_x^\alpha$ kesirli integralin ve ${}_c D_x^\alpha$ Riemann-Liouville türevinin iyi bilinen (4.10) özelliğini kullanılarak gerçekleştirilir. Burada

$$\lim_{x \rightarrow c^+} {}_c D_x^{\alpha-k} y(x) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n$$

eşitliği diferansiyel denklem için Cauchy tipi problemi oluşturur.

Bir sonraki bölümde çözümlerin varlığını ve tekliğini göstermek için bu teoriyi kullanacağız.

6. RIEMANN-LIOUVILLE TÜREV İÇEREN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN LİE SİMETRİ ANALİZİ

Bu bölümde, KmKDD için sınır değer problemlerin çözümü ve analizi için analitik yöntemlerinden biri olan Lie simetri analizini kullanarak araştırma ve geliştirme yapılarak kesirli türev operatörü içeren KdV denklemler grubundan dalga denklemleri incelenmiştir.

6.1. Genelleştirilmiş Kesirli KdV Diferansiyel Denklem için Lie Grup Yöntemi

Araştırma sürecinde ilk başta (Iskandarova ve Kaya, 2017) çalışmasında verilen aşağıdaki KmKDD'i

$${}_0D_t^\alpha u = (g(u)u_{xx})_x, \quad (6.1)$$

göz önüne alalım. Burada ${}_0D_t^\alpha u$, $u(t, x)$ fonksiyonun Riemann-Liouville türevidir ve $g(u)$, $u(t, x)$ 'ya bağlı bir fonksiyondur. (6.1) denkleminin açılımı

$${}_0D_t^\alpha u - g'(u)u_{xx}u_x - g(u)u_{xxx} = 0, \quad (6.2)$$

şeklinde olur. Bu denklem (4.16) ile (4.15) kesirli türevler için Lie grup dönüşümü altında

$$\begin{aligned} \xi_u &= \xi_t = \tau_u = \tau_x = \eta_{uu} = 0, \\ -\alpha g' \tau_t - g'' \eta + 3g' \xi_x - g' \eta_u &= 0, \\ -\alpha g \tau_t - g' \eta + 3g \xi_x &= 0, \\ -g' \eta_{xx} - 3g \eta_{xxu} &= 0, \\ -2g' \eta_{xu} + g' \xi_{xx} &= 0, \\ -g' \eta_x - 3g \eta_{xu} + 3g \xi_{xx} &= 0, \\ \eta_{ut} - \frac{\alpha-1}{2} \tau_{tt} &= 0, \\ \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} - g \eta_{xxx} &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

denklem sistemini verir. Elde edilen sistemi ξ, τ, η sonsuz küçükler göre

çözdüğümüzde bazı özel $g(u)$ fonksiyonları için aşağıdaki sonsuz küçük operatörler bulunur.

- $g(u)$ fonksiyonu herhangi keyfi fonksiyonu olduğunda

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3t}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t},$$

üç sonsuz küçük operatör elde etmiş oluruz.

- $g(u) = 1$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olduğunda X_1, X_2, X_3 operatörlerine ek olarak dördüncü

$$X_4 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = h(t, x) \frac{\partial}{\partial u},$$

sonsuz küçük operatörleri bulunur. Burada $h(t, x)$ fonksiyonu $D_t^\alpha h = h_{xxx}$ lineer denklemini sağlar.

- $g(u) = u^b$ için $b \neq 0$ ile $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, o zaman iki

$$X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3u}{b} \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha u}{b} \frac{\partial}{\partial u}.$$

sonsuz küçük operatörü daha elde edilir.

- $g(u) = u^b$ için $b = -3$ iken özel durum olur ve

$$X_6 = x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{6t}{\alpha - 3} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{(3\alpha - 3)u}{\alpha - 3} \frac{\partial}{\partial u}.$$

operatörü hesaplanılır.

- $g(u) = e^u$ olup α parametresi $\alpha = 1$ tam sayı iken

$$X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + 3 \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial u},$$

şeklinde iki ek operatör daha bulunur.

$g(u) = e^u$ fonksiyonu için α kesirli olduğunda dönüşüm ek sonsuz küçük operatör vermediğini belirlemek gerekir. Yani denklemin $g(u) = e^u$ iken X_1, X_2, X_3 operatörler ile verilen simetriler dışında simetrisi yoktur. Bu ifadenin doğru olduğunu aşağıdaki teorem ile gösterebiliriz.

Teorem 6.1. $D_t^\alpha u = (g(u)u_{xx})_x$ denklemin $g(u) = e^u$ ve $0 < \alpha < 1$ için X_1, X_2, X_3 operatörler dışında ek sonsuz küçük operatörü yoktur.

İspat: $g(u) = e^u$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun, bu durumda (6.3) denklem sistemi

1. $\xi_u = \xi_t = \tau_u = \tau_x = \eta_{uu} = 0$,
2. $-\alpha e^u \tau_t - e^u \eta + 3e^u \xi_x - e^u \eta_u = 0$,
3. $-\alpha e^u \tau_t - e^u \eta + 3e^u \xi_x = 0$,
4. $-e^u \eta_{xx} - 3e^u \eta_{xxu} = 0$,
5. $-2e^u \eta_{xu} + e^u \xi_{xx} = 0$,
6. $-e^u \eta_x - 3e^u \eta_{xu} + 3e^u \xi_{xx} = 0$,
7. $\eta_{ut} - \frac{\alpha-1}{2} \tau_{tt} = 0$,
8. $\frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} - e^u \eta_{xxx} = 0$,

olarak verilir. Birinci denklemden $\xi = A(x)$, $\tau = B(t)$ ve $\eta = C(x, t)u + D(x, t)$ şeklinde olur. 2. ve 3. denklemlerden $C = 0$ olup ve 5. ve 7. denklemlerden $A = c_1 x + c_2$ ve $B = c_3 t + c_4$ olarak elde edilir. Böylece karşılık gelen türevleri bulup ve 2. denkleme koyarak D 'ın sabit olduğunu görürüz, ancak 8. denklemden $\frac{\partial^\alpha D}{\partial t^\alpha} = 0$ olup, bize $D = c_5 t^{\alpha-1}$ verir ve böylece bir çelişki elde edilir. Bu ise $0 < \alpha < 1$ ve $g(u) = e^u$ için ek simetri olmadığı anlamına gelir.

Şimdi $g(u)$ fonksiyonunun bazı özel durumları için çözümlerini gösterelim. $g(u) = 1$ için (6.2) denklemi $D_t^\alpha u = u_{xxx}$ şeklinde olan lineer KdV denklemini verir ve Lie grup dönüşümü altında

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3t}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_4 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = h(t, x) \frac{\partial}{\partial u},$$

beş sonsuz küçük operatöre sahip olur. X_1 ve X_4 operatörlerinin birleşimi

$$X_1 + kX_4 = \frac{\partial}{\partial x} + ku \frac{\partial}{\partial u},$$

operatörünü verir, burada $k \in \mathbb{R}$. O zaman (6.2) denkleminin çözümü $u(t, x) = e^{kx}\phi(t)$ olur, burada $\phi(t)$ fonksiyonu

$$D_t^\alpha \phi(t) = k^3 \phi(t),$$

denklemini sağlar ve böylece

$$u(t, x) = e^{kx} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(k^3 t^\alpha),$$

olacak şekilde çözüm elde edilir. Bu elde edilen çözüm $E_{\alpha, \beta}(x)$ fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonudur.

$g(u) = u^b$ için ise (6.2) denklemi $D_t^\alpha u = bu^{b-1}u_{xx}u_x + u^b u_{xxx}$ şeklinde olup

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3t}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3u}{b} \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha u}{b} \frac{\partial}{\partial u}.$$

operatörlere sahiptir. Buradaki X_4 operatörü

$$u(t, x) = x^{3/b} \phi(t),$$

$\phi(t)$ fonksiyonu $D_t^\alpha \phi(t) = \frac{3(9-b^2)}{b^3} \phi^{b+1}(t)$ denklemi sağlayacak şekilde bir çözümü verir. Eğer $b = 3$ ise, bu durumda $D_t^\alpha \phi(t) = 0$ olur, ve $\phi(t) = Ct^{\alpha-1}$, $C \in \mathbb{R}$ verir. Dolayısıyla

$$u(x, t) = Cx^{3/b} t^{\alpha-1},$$

şeklinde bir çözüm elde edilir. Ayrıca $b = -1$ iken $D_t^\alpha \phi(t) = -24$ olup

$$u(t, x) = -\frac{24x^{-3}t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)},$$

gibi başka bir çözüm elde edilir. Böylece Lie grup analizinin, sadece lineer ve loKDD'lerin değil, aynı zamanda KmKDD'lerin çözümü için de güçlü bir araç olduğu görülmüş olur.

Bununla birlikte bir çalışmamızda (Kaya ve Iskandarova, 2019) genelleştirilmiş Riemann-Liouville türev içeren KdV diferansiyel denklemini başlangıç ve sınır koşulu ile ele aldık.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + P(u^n)_x = Qg(t)(u^n)_{xxx}, \\ u(t, 0) = \Psi(t), & t \in [0, T], \\ u(0, x) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (6.4)$$

burada $u(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$, $T > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $P, Q \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler ve $n \neq 1 \in \mathbb{R}$ için bir fonksiyondur. Bu denklem, uzun dalga boyu bölgesinde lineer olmayan su dalgalarının yayılımını meydana getirir. Bu çalışmamızda başlangıç ve sınır değer problemini Abd-el-Malek ve Amin (2015)'den farklı başlangıç ve sınır koşullarıyla incelediğimizi belirtmek isteriz.

Araştırma sırasında zaman-kesirli genelleştirilmiş KdV denkleminin elde edilen sonsuz küçük operatörlerini kullanarak lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülebildiğini gösterdik. Ayrıca, (6.4) denklemi için korunum kanunlarını belirledik.

(6.4) denklemindeki $g(t)$ fonksiyonu için aşağıdaki durumları göz önüne alıp sonuçlar elde ettik.

- Keyfi $g(t)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için aşağıdaki operatör

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

bulunur. X_1 operatörünü kullanarak $u(x, t) = ct^{\alpha-1}$ çözümüne ulaşılabilir, burada c keyfi sabittir.

- $g(t) = t^\lambda$, $\lambda \neq 0$ için

$$X_2 = \frac{\lambda}{2}x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}u \frac{\partial}{\partial u},$$

bir sonsuz küçük operatör daha elde edilir. X_2 operatörüne karşılık gelen karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{\frac{\lambda}{2}x} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{\frac{2\alpha-\lambda}{2-2n}u},$$

şeklinde olup

$$u(t, x) = t^{\frac{2\alpha-\lambda}{2-2n}} \phi(p), \quad p = xt^{-\frac{\lambda}{2}}. \quad (6.5)$$

p yeni değişken içeren simetri dönüşümünü verir. Bu sonsuz küçük operatör kullanılarak aşağıdaki teorem doğrulanır.

Teorem 6.2. $u(x, t) = t^{\frac{2\alpha-\lambda}{2-2n}} \phi(p)$, $p = xt^{-\frac{\lambda}{2}}$ simetri dönüşümüne göre, $g(t) = t^\lambda$ iken (6.4) KdV diferansiyel denklemi aşağıdaki lineer olmayan kesirli türev içeren adi diferansiyel denkleme dönüşür:

$$\begin{aligned} & \left(P_{2/\lambda}^{1-\alpha+\frac{2\alpha-\lambda}{2-2n}, \alpha} \phi \right) (p) + nP(\phi(p))^{n-1} \phi'(p) = Qn\phi'''(p)(\phi(p))^{n-1} \\ & + 3Qn(n-1)\phi'(p)\phi''(p)(\phi(p))^{n-2} + Qn(n-1)(n-2)(\phi'(p))^3(\phi(p))^{n-3}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

burada $P_\gamma^{\alpha, \beta}$ Erdelyi-Kober diferansiyel operatörü

$$n = \begin{cases} [\beta] + 1, & \beta \notin \mathbb{N}, \\ \beta, & \beta \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ile

$$(P_\gamma^{\alpha, \beta} f)(x) := \prod_{j=0}^{n-1} \left(\alpha + j - \frac{1}{\gamma} x \frac{d}{dx} \right) (K_\gamma^{\alpha+\beta, n-\beta} f)(x), \quad (6.7)$$

şeklinde olur ve $K_\gamma^{\alpha, \beta}$ Erdelyi-Kober integral operatörü

$$(K_\gamma^{\alpha, \beta} f)(x) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^\infty (u-1)^{\beta-1} u^{-(\alpha+\beta)} f(xu^{1/\gamma}) du, & \beta > 0, \\ f(x), & \beta = 0. \end{cases} \quad (6.8)$$

ifadesi ile verilir.

İspat: $m - 1 < \alpha < m$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun, Riemann-Liouville türevi göz önüne alalım ve (6.5) dönüşümünü kullanarak

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - \varsigma)^{m - \alpha - 1} \varsigma^{\frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}} \phi(x \varsigma^{-\frac{\lambda}{2}}) d\varsigma \right],$$

elde edilir. Burada $s = \frac{t}{\varsigma}$ yeni değişken dönüşümü yapalım, o zaman

$$\begin{aligned} & \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_1^\infty t^{m - \alpha - 1 + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} + 1} (s - 1)^{m - \alpha - 1} s^{-\frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} - m + \alpha - 1} \phi(p s^{\frac{\lambda}{2}}) ds \right] \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{t^{m - \alpha + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}}}{\Gamma(m - \alpha)} \int_1^\infty (s - 1)^{m - \alpha - 1} s^{-(m - \alpha - 1 + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n})} \phi(p s^{\frac{\lambda}{2}}) ds \right] \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left[t^{m - \alpha + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}} \left(K_{\frac{2}{\lambda}}^{1 + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}, m - \alpha} \phi \right) (p) \right], \end{aligned}$$

bulunur. $p = xt^{-\frac{\lambda}{2}}$ olmak üzere ve m kere türev alarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{d}{dt} t^{m - \alpha + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}} \left(K_{\frac{2}{\lambda}}^{1 + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}, m - \alpha} \phi \right) (p) \right] \\ &= \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[t^{m - \alpha + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} - 1} \left(m - \alpha + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} - \frac{2p}{\lambda} \frac{d}{dp} \right) \left(K_{\frac{2}{\lambda}}^{1 + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}, m - \alpha} \phi \right) (p) \right] = \\ &\vdots \\ &= t^{-\alpha + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}} \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} - \alpha + j - \frac{2}{\lambda} p \frac{d}{dp} \right) (K_{\frac{2}{\lambda}}^{1 + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}, m - \alpha} \phi)(p) \\ &= t^{-\alpha + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n}} \left(P_{\frac{2}{\lambda}}^{1 + \frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} - \alpha, \alpha} \phi \right) (p), \end{aligned}$$

hesaplanır. Böylece, lineer olmayan genelleştirilmiş KdV diferansiyel denkleme karşılık gelen aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüşür

$$\left(P_{2/\lambda}^{1-\alpha+\frac{2\alpha-\lambda}{2-2n}, \alpha} \phi \right) (p) + nP(\phi(p))^{n-1} \phi'(p) = Qn\phi'''(p)(\phi(p))^{n-1} \\ + 3Qn(n-1)\phi'(p)\phi''(p)(\phi(p))^{n-2} + Qn(n-1)(n-2)(\phi'(p))^3(\phi(p))^{n-3},$$

bu ise ispatı tamamlar.

- $g(t)$ fonksiyonu $g(t) = 1$ iken iki ek operatör daha elde edilir

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha}{1-n} u \frac{\partial}{\partial u},$$

ve X_3 operatörü $u = t^{\frac{\alpha}{1-n}} \phi(x)$ dönüşümünü verir, böylece

$$G(\alpha, n)\phi(x) + nP(\phi(x))^{n-1}\phi'(x) - 3n(n-1)Q(\phi(x))^{n-2}\phi'(x)\phi''(x) \\ - n(n-1)(n-2)Q(\phi(x))^{n-3}(\phi'(x))^3 - nQ(\phi(x))^{n-1}\phi'''(x) = 0, \quad (6.9)$$

denklemini bulunur, burada $G(\alpha, n) = \frac{\Gamma(1+\frac{\alpha}{(1-n)})}{\Gamma(1-\alpha+\frac{\alpha}{(1-n)})}$ şeklindedir.

Ele alınan (6.4) problemi için $\alpha = 1$ iken

$$\begin{cases} u_t + P(u^n)_x = Qg(t)(u^n)_{xxx}, \\ u(t, 0) = \Psi(t), \\ u(0, x) = \Phi(x), \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [0, T], \\ x \in \mathbb{R}^+, \end{matrix} \quad (6.10)$$

problemine dönüşür ve başlangıç ve sınır koşullarının Lie grup analizi aşağıdaki gibi olur. Bluman'ın başlangıç ve sınır değer problemi için Lie grup dönüşümü tanımına göre keyfi $g(t)$ fonksiyon için sadece $X = c_1 \frac{\partial}{\partial x}$ sonsuz küçük operatörü vardır ve $x = 0$ olduğundan $\xi(0) = 0$ elde edilir, bu ise $c_1 = 0$ verir. Yani, $g(t)$ keyfi fonksiyon iken (6.10) başlangıç ve sınır değer problemi herhangi simetriye sahip değildir.

$g(t) = 1$ iken $X_1 = c_1 \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = c_2 \frac{\partial}{\partial t}$ ve $X_3 = c_3 \left(t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{1-n} \frac{\partial}{\partial u} \right)$ iki operatör için benzer şekilde $c_1 = 0$ ve $c_3 = 0$ olup $t\Psi'(t) = \frac{c_2}{1-n}\Psi(t)$ ve $\frac{c_2}{1-n}\Phi(x) = 0$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler sırasıyla $\Psi(t) = t^{\frac{1}{1-n}}M$ ve $\Phi(x) = 0$, burada M keyfi sabittir. Böylece sadece

$$X = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{1-n} u \frac{\partial}{\partial u},$$

sonsuz küçük operatör altında (6.10) başlangıç ve sınır değer problemi değişmez kalır ve başlangıç sınır koşullar aşağıdaki gibi olur

$$\begin{cases} u(t, 0) = t^{\frac{1}{1-n}} M, & t \in [0, T], \\ u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Böylece sonsuz küçük operatörü $u(t, x) = t^{\frac{1}{1-n}} \psi(x)$ dönüşümü verip, (6.10) probleme değişmez olan adi diferansiyel denklem için

$$\begin{cases} \frac{1}{1-n} \psi(x) + nP\psi(x)^{n-1}\psi'(x) - Q(n(n-1)(n-2)\psi(x)^{n-3}\psi'(x)^3 \\ + 3n(n-1)\psi(x)^{n-2}\psi'(x)\psi''(x) + n\psi(x)^{n-1}\psi'''(x)) = 0, \\ \psi(0) = M. \end{cases} \quad (6.11)$$

Cauchy problemi elde edilir.

Son olarak da $g(t) = e^t$ ile $g(t)$ keyfi fonksiyonu için $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olup (6.10) problemi için problemin simetri olmadığı kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi

(6.4)'teki denklemin korunum kanunlarını belirleyeceğiz. Bunun için Ibragimov'un teoremini kullanarak $g(t)$ keyfi fonksiyon için elde edilen $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ operatörü, $W_1 = -u_x$ bulunur ve

$$\begin{aligned} C^x &= Pu^{2n-1}u_x - (n-1)(n-2)Qg(t)u^{2n-3}u_x^3 - 3(n-1)Qg(t)u^{2n-2}u_xu_{xx} \\ &- Qg(t)u^{2n-1}u_xu_{xxx}, \end{aligned}$$

$$C^t = -\frac{u^n}{n}I_t^{1-\alpha}(-u_x) + J(-u_x, -u^{n-1}u_t),$$

şeklinde olur ve burada $J(f, g) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(x,s)g(x,p)}{(p-s)^{\alpha+1-m}} dp ds$ 'dir.

$g(t) = t^\lambda$ için $X_2 = \frac{2\alpha-\lambda}{2-2n} \frac{\partial}{\partial u} + t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\lambda}{2} x \frac{\partial}{\partial x}$ operatörü, $W_2 = \frac{2\alpha-\lambda}{2-2n} u - tu_t - \frac{\lambda}{2} xu_x$ eşitliğini verir ve

$$\begin{aligned}
C^x &= \left(\frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} u - tu_t - \frac{\lambda}{2} xu_x \right) (-Pu^{2n-1} + (n-1)(n-2)Qt^\lambda u^{2n-3}u_x^2 \\
&+ (2n-1)Qt^\lambda u^{2n-2}u_{xx}) + \left(\frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} u_x - tu_{xt} - \frac{\lambda}{2} xu_{xx} - \frac{\lambda}{2} u_x \right) (n-2)Qt^\lambda u^{2n-2}u_x \\
&+ \left(\frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} u_{xx} - tu_{xxt} - \lambda u_{xx} - \frac{\lambda}{2} xu_{xxx} \right) Qt^\lambda u^{2n-1},
\end{aligned}$$

$$C^t = -\frac{u^n}{n} I_t^{1-\alpha} \left(\frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} u - tu_t - \frac{\lambda}{2} xu_x \right) + J \left(\frac{2\alpha - \lambda}{2 - 2n} u - tu_t - \frac{\lambda}{2} xu_x, -u^{n-1}u_t \right),$$

olur.

$g(t) = 1$ için $X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $X_4 = \frac{\alpha}{1-n} u \frac{\partial}{\partial u} + t \frac{\partial}{\partial t}$ operatörler, $W_3 = u_t$, $W_4 = \frac{\alpha}{1-n} u - tu_t$ eşitlikleri elde edilip, sırayla

$$\begin{aligned}
C^x &= Pu^{2n-1}u_t - (n-1)(n-2)Qg(t)u^{2n-3}u_x^2u_t - (2n-1)Qg(t)u^{2n-2}u_tu_{xx} \\
&- (n-1)Qg(t)u^{2n-2}u_xu_{tx} - Qg(t)u^{2n-1}u_xu_{xt},
\end{aligned}$$

$$C^t = -\frac{u^n}{n} I_t^{1-\alpha} (-u_t) + J(-u_t, -u^{n-1}u_t),$$

ve

$$\begin{aligned}
C^x &= \left(\frac{\alpha}{1-n} u - tu_t \right) \left((n-1)(n-2)Qt^\lambda u^{2n-3}u_x^2 + (2n-1)Qt^\lambda u^{2n-2}u_{xx} - Pu^{2n-1} \right) \\
&+ \left(\frac{\alpha}{1-n} u_x - tu_{xt} \right) (n-2)Qt^\lambda u^{2n-2}u_x + \left(\frac{\alpha}{1-n} u_{xx} - tu_{xxt} \right) Qt^\lambda u^{2n-1},
\end{aligned}$$

$$C^t = -\frac{u^n}{n} I_t^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-n} u - tu_t \right) + J \left(\frac{\alpha}{1-n} u - tu_t, -u^{n-1}u_t \right),$$

şeklinde bulunur.

Böylece t zaman parametresinin Riemann-Liouville türevi içeren lineer olmayan denklemlerin Lie grup analizi inceleyip bazı özel durumlar için çözüm verip, korunum kanunlarını belirledik. Lie simetrisini kullanarak (6.4) kesirli genelleştirilmiş KdV denkleminin Erdelyi-Kober türevi içeren denkleme indirgenebileceğini gösterdik. Ayrıca, başlangıç ve sınır koşullarını incelerken, $\alpha = 1$ için sınır değer problemimiz

için değişmez olduğunu gördük. Bu çalışma bize $\alpha \neq 1$, yani α kesirli sayı olduğunda başlangıç ve sınır koşullarının Lie grup analizini incelememize yol açmıştır.

7. CAPUTO TÜREVİ İLE VERİLEN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLER İÇİN LİE SİMETRİ ANALİZİ

KmKDD'lerin sınır değer problemleri için Lie grup yöntemini araştırdığımızda izlediğimiz yola göre verilen tanım ve ispatlanan teorem Caputo türev için geçerli olup Riemann-Liouville türev için geçerli değildir. Bu bölümde, zaman-kesirli Harry-Dym diferansiyel denklemi ve ardından klasik difüzyon denklemi ile 3. mertebeden diferansiyel denklemi için başlangıç ve sınır değer problemleri Caputo türevi ile kullanılarak incelenecektir.

7.1. Caputo Türevli Harry-Dym Diferansiyel Denklem için Başlangıç ve Sınır Değer Problemi

Bu Bölümde Caputo türevli başlangıç ve sınır değer probleminin simetrilerini inceleyeceğiz (İskenderoğlu ve Kaya, 2019). Kesirli zaman türevli Harry-Dym denklem için başlangıç ve sınır değer problemi aşağıdaki gibi verilsin.

$${}^C D_t^\alpha u = (A(u)u_x)_{xx}, \quad (7.1)$$

ile

$$\begin{cases} u(t, 0) = f(t), & t > 0, \\ u(0, x) = g(x), & x > 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

başlangıç ve sınır koşulları olsun.

(7.1) denkleminde Lie simetri yöntemini uyguladığımızda üç durum elde ediyoruz. Bunlar:

- $A(u) = u^s$, $s \neq -1$ ve $s \neq 0$ için

$$\xi = c_1 x + c_2,$$

$$\tau = \frac{3c_1}{\alpha(s+1)}t + c_3,$$

$$\eta = 3c_1 u.$$

elde ettik, bu ise

$$X = (c_1x + c_2) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{3c_1}{\alpha(s+1)} + c_3 \right) \frac{\partial}{\partial t} + 3c_1u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (7.3)$$

şeklinde sonsuz üretici veriyor.

Burada her c_i , $i = 1, 2, 3$ sabiti $A(u) = u^s$ ile (7.1) denklemi için bir simetri temsil ediyor. Başlangıç ve sınır değer problemlerin değişmezliği tanımı, aşağıdaki tartışmayı yapmamıza izin verir. $t = 0$ eşitliğin değişmezliği $c_3 = 0$ 'ı verir ve $x = 0$ eşitliğin değişmezliği $c_2 = 0$ 'ı verir. Böylece

$$\frac{3c_1}{\alpha(s+1)} t \frac{d}{dt} f(t) = 3c_1 f(t),$$

olur. Bu denklemin çözümü $f(t) = t^{\alpha(s+1)} k_1$, k_1 keyfi sabit olacak şekilde elde edilir.

Ayrıca $t = 0$ için

$$c_1x \frac{d}{dx} g(x) = 3c_1g(x),$$

veya $g(x) = x^3 k_2$, burada k_2 keyfi sabit olacak şekilde elde edilir.

Bu, eğer (7.1) denklem ile $A(u) = u^s$ için sınır ve başlangıç koşulları yukarıdaki gibi ise, o zaman bu problem (7.3) sonsuz üretici altında değişmezdir anlamına gelir ve aşağıdaki sonsuz küçük bir operatör elde edilir:

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{\alpha(s+1)} t \frac{\partial}{\partial t} + 3u \frac{\partial}{\partial u}.$$

- Eğer $A(u) = u^{-1}$ ise o zaman sonsuz üretic

$$X = c_1 \frac{\partial}{\partial x} + (c_2t + c_3) \frac{\partial}{\partial t} + \alpha c_2u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (7.4)$$

şeklinde elde edilir.

Durum 1 ile aynı operasyondan sonra $c_1 = c_3 = 0$ bulunur. $t = 0$ için $0 = \alpha c_2 g(x)$ elde edilir, bu da başlangıç koşulunun $u(0, x) = 0$ şeklinde olduğu anlamına gelir. $x = 0$ iken $f(t)$, $c_2 t \frac{d}{dt} f(t) = \alpha c_2 f(t)$ için $f(t) = t^\alpha k_3$ biçiminde bir çözümdür, burada k_3 keyfi sabittir. Eğer sınır ve başlangıç koşulları yukarıdaki gibi ise

$$X_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial}{\partial u},$$

yazılır ve bu problem için bir sonsuz küçük operatör ise, o zaman $A(u) = u^{-1}$ için (7.1) ile (7.7) problemi (7.4) sonsuz üreteç altında değişmezdir. X_2 operatörü $u = t^\alpha \phi(x)$ dönüşümü verir. Bu dönüşüm probleme uygulandığında

$$\phi(x) \Gamma(\alpha + 1) = 2\phi(x)^{-3} \phi'(x)^3 - 3\phi(x)^{-2} \phi'(x) \phi''(x) + \phi(x)^{-1} \phi'''(x),$$

elde edilir. Başlangıç koşulu $u(0, x) = 0$, $u = t^\alpha \phi(x)$ sağlıyor ve sınır koşulu $u(t, 0) = t^\alpha k_3$, $\phi(0) = k_3$ verir. Böylece (7.1) ile (7.7) problemi

$$\begin{cases} \phi(x) \Gamma(\alpha + 1) = 2\phi(x)^{-3} \phi'(x)^3 - 3\phi(x)^{-2} \phi'(x) \phi''(x) + \phi(x)^{-1} \phi'''(x), \\ \phi(0) = k_3, \end{cases}$$

Cauchy problemine dönüşür.

- Eğer $A(u) = 1$ ise,

$$X = (\alpha c_1 x + c_2) \frac{\partial}{\partial x} + (3c_1 t + c_3) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\left(\alpha + \frac{3}{2(1-\alpha)} \right) u c_1 + c_4 \right) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (7.5)$$

şeklinde sonsuz üreteç elde edilir. $x = 0$ ve $t = 0$ eşitliklerin değişmezliği $c_2 = c_3 = 0$ verir. Ayrıca, $t = 0$ için aşağıdaki denklemi

$$\alpha c_1 x \frac{d}{dx} g(x) = \left(\alpha + \frac{3}{2(1-\alpha)} \right) c_1 g(x) + c_4,$$

elde ederiz, burada $c_4 = 2c_1$ olsun, o zaman denklemin çözümü $g(x) = -\frac{4(1-\alpha)}{4(\alpha-\alpha^2)+3} + x^{2+\frac{3}{2\alpha(1-\alpha)}} k_4$ şeklinde olur, burada k_4 keyfi sabittir. $x = 0$ için ise

$$3c_1 t \frac{d}{dt} f(t) = \left(\alpha + \frac{3}{2(1-\alpha)} \right) c_1 f(t) + c_4,$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözümü ise $f(t) = -\frac{4(1-\alpha)}{4(\alpha-\alpha^2)+3} + t^{\frac{2\alpha(1-\alpha)+3}{6(1-\alpha)}} k_5$,
şeklinde elde edilir ve burada k_5 keyfi sabittir.

Benzer bir şekilde, eğer başlangıç ve sınır değer koşulları yukarıdaki şekilde ise ve

$$X_3 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 3t \frac{\partial}{\partial t} + \left(\alpha + \frac{3}{2(1-\alpha)} u + 2 \right) \frac{\partial}{\partial u},$$

bu problem için bir sonsuz küçük operatör ise, bu durumda $A(u) = 1$ için (7.1) ile (7.7) başlangıç ve sınır değer problemi (7.4) sonsuz küçük üretici altında değişmezdir.

Böylece Caputo türevi ile verilen lineer olmayan zaman-kesirli Harry-Dym denklemi için başlangıç ve sınır değer problemlerini incelemek için Lie grubu analizin uygulamasını inceledik. Göz önüne alınan Caputo türevli Harry-Dym problem için Lie simetri yöntemi kullanarak indirgenmiş başlangıç ve sınır değer problem elde ettik.

7.2. Caputo Türevli Difüzyon Denklemi ve Kesirli Türevli 3. Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklem için Başlangıç ve Sınır Değer Problemi

Bu kısımda Caputo türevi ile ele alınan lineer olmayan KmKDD için başlangıç ve sınır değer problemi araştırmak için Lie simetri analizin uygulamasını inceliyoruz (İskenderoğlu ve Kaya, 2020).

İlk önce Caputo türevli difüzyon denklemi için başlangıç ve sınır değer problemi aşağıdaki gibi verilsin:

$${}^C D_t^\alpha u = (u^p u_x)_x, \quad p \neq 0, \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= a(t), \quad t > 0, \\ u(0, x) &= b(x), \quad x > 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Gazizov vd. (2009) (7.6) denklem için simetrileri

$$X = \left(c_1 + c_2 \frac{\alpha}{2} x + c_3 p x \right) \frac{\partial}{\partial x} + c_2 t \frac{\partial}{\partial t} + 2c_3 u \frac{\partial}{\partial u},$$

formunda olan üretici bulmuşlardır. Biz ise bu (7.6) denklemi için başlangıç ve sınır değer koşullarının simetri analizini yaptık. Bunun için başlangıç ve sınır koşullarının bu üretici altında değişmezliğini inceledik. Böylece $t = 0$ 'nin değişmezliğinden $\tau(0) = 0$ ve $x = 0$ 'nin değişmezliğinden $\xi(0) = 0$ elde ettik. Buradan, $\xi(0) = 0$ için $c_1 = 0$ bulduk.

$$c_2 t \frac{d}{dt} a(t) = 2c_3 a(t),$$

ve $\tau(0) = 0$ için

$$\left(c_2 \frac{\alpha}{2} x + c_3 p x \right) \frac{d}{dx} b(x) = 2c_3 b(x),$$

elde edip ve böylece k_1 ve k_2 keyfi sabit için

$$a(t) = t^{\frac{2c_3}{c_2}} k_1 \quad \text{ve} \quad b(x) = x^{\frac{2}{c_2\alpha/2c_3+p}} k_2,$$

şeklinde bulduk. Bu ise başlangıç ve sınır koşulları bu formda olduğunda

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u = (u^p u_x)_x, & p \neq 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ u(t, 0) = t^{\frac{2c_3}{c_2}} k_1, & t > 0, \\ u(0, x) = x^{\frac{2}{c_2\alpha/2c_3+p}} k_2, & x > 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

başlangıç ve sınır değer problemi değişmez olabilir anlamına gelir. Caputo türevi ile Riemann-Liouville türevinin arasındaki ilişkiden, yani (4.13)'den

$${}^C D_t^\alpha f(t) = D_t^\alpha f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{\Gamma(i - \alpha + 1)} t^{i-\alpha},$$

veya

$$I_t^{\alpha C} D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^i,$$

elde edilir. Yukarıdaki özelliği uyguladıktan ve (7.6) denklemin her iki tarafının I_t^α olacak şekilde kesirli integral alındıktan sonra

$$u(t, x) = u(0, x) + I_t^\alpha (\partial_x (u(t, x)^p \partial_x u(t, x))), \quad (7.9)$$

bulunur. Şimdi (7.8) probleminin tek bir çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için Banach sabit nokta teoremine dayanan aşağıdaki teoreme ihtiyacımız var.

Teorem 7.1. (7.8), $\Omega = \{(t, x) : 0 < x < \infty, 0 < t \leq T_1, T_1 \in \mathbb{R}\}$ üzerinde tanımlı başlangıç ve sınır değer problemi olsun ve $L < \frac{\Gamma(\alpha-1)}{T_1^\alpha}$ bir Lipschitz sabiti ile $F(u) = (u^p u_x)_x$ Lipschitz koşulu sağlasın. O zaman (7.9) denkleminin tek bir çözümü vardır.

İspat: Burada Ω üzerinde tanımlı tüm sürekli türevlenebilen fonksiyonlar kümesi ve $\|f(x)\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ supremum normu ile tam normlu bir uzaydır ve $Tu = u$ 'dur. Bu durumda T 'nin büzülme dönüşümü olduğunu göstermek yeterlidir. Ω üzerinde tanımlı u_1 ve u_2 iki sürekli fonksiyon olsun, o zaman

$$\begin{aligned} \|Tu_1 - Tu_2\| &= \|u(0, x) + I_t^\alpha (\partial_x (u_1^p \partial_x u_1)) - u(0, x) - I_t^\alpha (\partial_x (u_2^p \partial_x u_2))\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\partial_x (u_1^p \partial_x u_1) - \partial_x (u_2^p \partial_x u_2)) d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \|\partial_x (u_1^p \partial_x u_1) - \partial_x (u_2^p \partial_x u_2)\| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^\alpha}{\alpha} \|\partial_x (u_1^p \partial_x u_1) - \partial_x (u_2^p \partial_x u_2)\| \\ &\leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|\partial_x (u_1^p \partial_x u_1) - \partial_x (u_2^p \partial_x u_2)\| \leq \frac{T_1^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} L \|u_1 - u_2\| < \|u_1 - u_2\|, \end{aligned}$$

bulunur ve buradan T , Ω üzerinde bir büzülme dönüşümü olduğu ortaya çıkar ve

dolayısıyla T tek sabit noktaya sahiptir, bu da (7.6) denkleminin tek bir çözüme sahip olduğu anlamına gelir.

$c_1 = 0$ olduğundan (7.6) denklemi (7.7) başlangıç ve sınır koşulları ile

$$X_1 = \frac{\alpha}{2} x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}, \quad \text{ve} \quad X_2 = px \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u},$$

iki sonsuz küçük operatöre sahiptir. Burada X_1 operatörü $u = f(x^{\frac{2}{\alpha}} t^{-1})$ dönüşümü, ve X_2 operatörü $u = x^{\frac{2}{p}} g(t)$ dönüşümünü verir. (7.7) ile (7.6) problemi için çözümün tekliği göz önüne alındığında,

$$f(x^{\frac{2}{\alpha}} t^{-1}) = x^{\frac{2}{p}} g(t),$$

veya

$$f(x^{\frac{2}{\alpha}} t^{-1}) = (x^{\frac{2}{\alpha}} g(t)^{\frac{p}{\alpha}})^{\frac{\alpha}{p}},$$

elde edilir. Böylece $f(z) = z^{\frac{\alpha}{p}}$ ve $g(t)^{\frac{p}{\alpha}} = t^{-1}$ eşitliklerden $g(t) = t^{-\frac{\alpha}{p}} k$ bulunur. Dolayısıyla, $u = x^{\frac{2}{p}} t^{-\frac{\alpha}{p}} c$ olur, burada c bulunacak olan sabittir.

Bir sonraki adımda, başlangıç ve sınır koşulları göz önüne alınsın. $u(t, 0) = 0$, $p > 0$ için başlangıç koşulundan, $k_1 = 0$ bulup, $t = 0$ noktasında blow-up (patlama) elde edilir, yani $p > 0$ için, $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0} x^{\frac{2}{p}} t^{-\frac{\alpha}{p}} c = +\infty$ belirlenir.

Ayrıca, benzer bir yaklaşım ile $p < 0$ için $u(0, x) = 0$ olur ve bu $k_2 = 0$ olup, $x = 0$ noktasında blow-up (patlama) verir ve $\lim_{x \rightarrow 0} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{2}{p}} t^{-\frac{\alpha}{p}} c = +\infty$ olur.

(7.6) denklemin çözümünü kontrol ederek $k = \sqrt[p]{\frac{2(2-p)\Gamma(1-\frac{\alpha}{p})}{p^2\Gamma(1-\frac{\alpha}{p}-\alpha)}}$ bulunur, böylece

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u = (u^p u_x)_x, & p > 0, \\ u(t, 0) = 0, & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = +\infty, & x > 0, \end{cases}$$

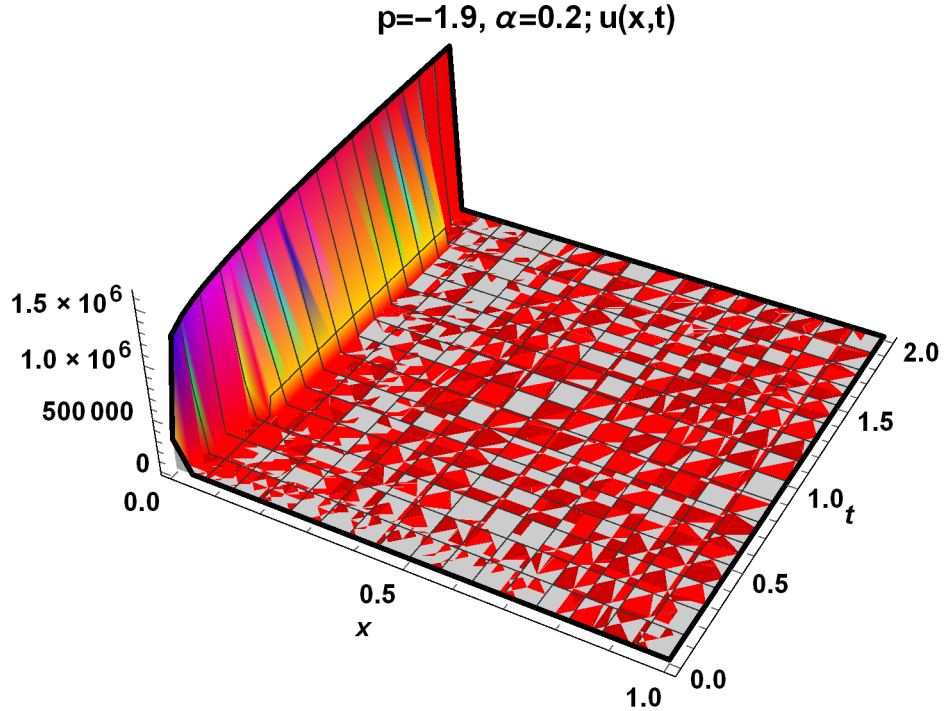
ve

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u = (u^p u_x)_x, & p < 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(t, x) = +\infty, & t > 0, \\ u(0, x) = 0, & x > 0, \end{cases}$$

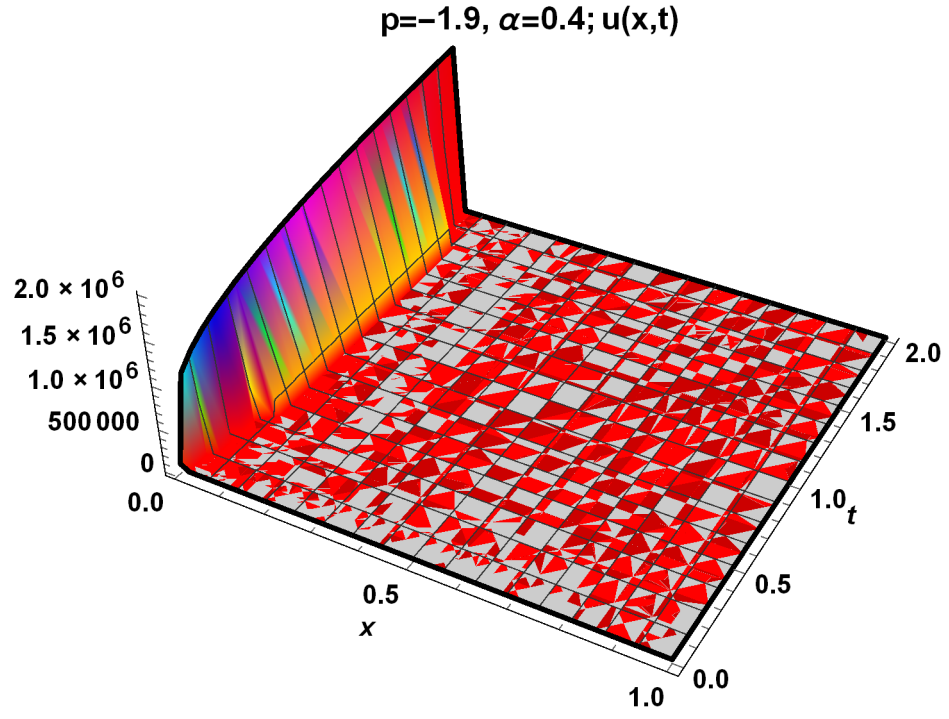
için

$$u(t, x) = \sqrt[p+1]{\frac{p^2 \Gamma(1 - \frac{\alpha}{p})}{2(2+p) \Gamma(1 - \frac{\alpha}{p} - \alpha)}} x^{\frac{2}{p}} t^{-\frac{\alpha}{p}},$$

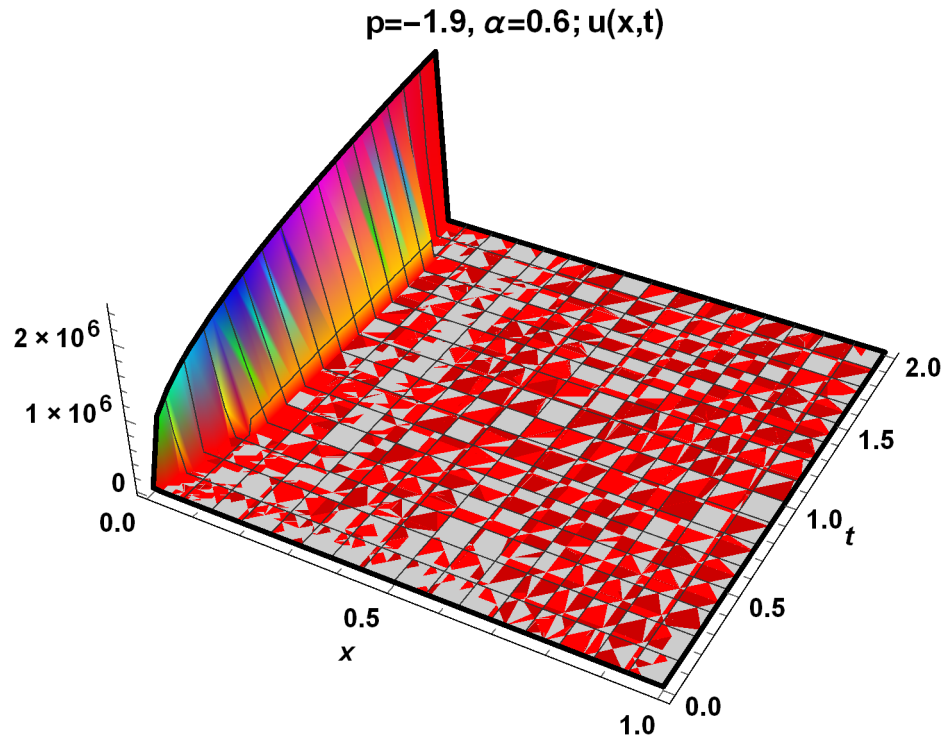
bir çözümdür. Bu çözümüm grafiği $p = -1,9$ için sırasıyla Şekil 7.1' de gibidir. Burada dikkat edecek olursak α değeri değıştikçe $u(x, t)$ potansiyelini etkilemektedir. Yukardaki şekillerde görüldüğü gibi α değeri artıkça $u(x, t)$ potansiyelinin genliğı artmaktadır. Örneğın $p = -1,9$ iken $\alpha = 0,2$ için $u(x, t)$ genliğı $1,5 \cdot 10^6$ iken $\alpha = 0,8$ için $3 \cdot 10^6$ genliğıne ulaşmaktadır. Bir çok çalışmada α değeri $u(x, t)$ potansiyelinin artma veya azalmasına sebep olduğı bilinmektedir (Yokuş ve Kaya, 2017; Yavuz ve Yokuş, 2020). Bu durumu yukardaki aynı yorumları $p = 7$ için de yapabiliriz.



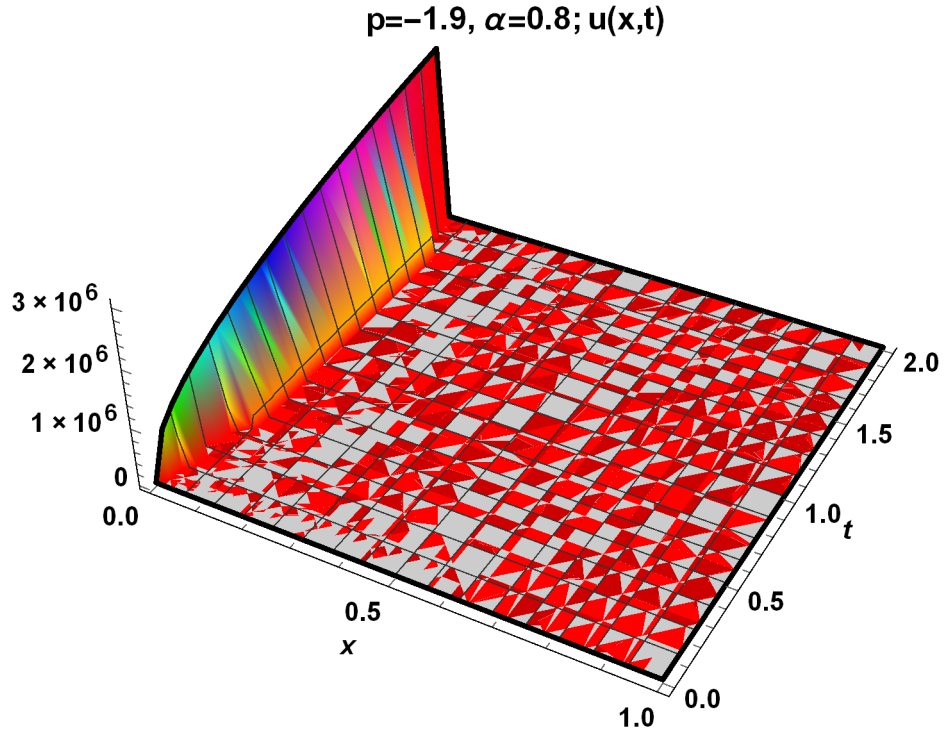
Şekil 7.1.(a) p negatif için çözüm



Şekil 7.1.(b) p negatif için çözüm



Şekil 7.1.(c) p negatif için çözüm



Şekil 7.1.(d) p negatif için çözüm

Bu kısımda ikinci problem olarak da aşağıdaki kesirli türev içeren kısmi diferansiyel denklem için başlangıç ve sınır değer problemini düşünelim:

$${}^C D_t^\alpha u = (u^q u_{xx})_x, \quad q \neq 0, \quad (7.10)$$

$$\begin{cases} u(t, 0) = d(t), & t > 0, \\ u(0, x) = e(x), & x > 0. \end{cases} \quad (7.11)$$

(7.10) denklem için Lie simetri yöntemini uygulanırsa

$$X = (c_1 x + c_2) \frac{\partial}{\partial x} + (c_3 t + c_4) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{3c_1 - \alpha c_3}{q} \right) u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (7.12)$$

elde edilmiş olur. $t = 0$ 'nin değişmezliğinden $c_4 = 0$ olur ve $x = 0$ 'nin değişmezliğinden $c_2 = 0$ elde edilir. Böylece (5.1) teoremini kullanarak

$$c_3 t \frac{d}{dt} d(t) = \frac{3c_1 - \alpha c_3}{q} d(t),$$

yani $d(t) = t^{\frac{3c_1 - \alpha c_3}{c_3 q}} k_3$, burada k_3 keyfi sabiti olarak bulunur. Dolayısıyla $t = 0$ iken

$$c_1 x \frac{d}{dx} e(x) = \frac{3c_1 - \alpha c_3}{q} e(x),$$

veya $e(x) = x^{\frac{3c_1 - \alpha c_3}{c_1 q}} k_4$ olur, burada k_4 keyfi sabittir.

Bu, (7.10) denklemi için başlangıç ve sınır değer problemi (7.12) sonsuz küçük üretece göre değişmezliği başlangıç ve sınır koşulları yukarıdaki formda olmasına dayanır ve problem

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u = (u^q u_{xx})_x, & q \neq 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ u(t, 0) = t^{\frac{3c_1 - \alpha c_3}{c_3 q}} k_3, & t > 0, \\ u(0, x) = x^{\frac{3c_1 - \alpha c_3}{c_1 q}} k_4, & x > 0, \end{cases} \quad (7.13)$$

şeklini alır.

Devamında (7.13) problemin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki teoremi verelim. Ancak önce şunu belirtmek isteriz ki, (4.13) özelliği dikkate alarak,

$$u(t, x) = u(0, x) + I_t^\alpha (\partial_x (u(t, x)^q \partial_{xx} u(t, x))), \quad (7.14)$$

bulunur.

Teorem 7.2. $\Omega = \{(t, x) : 0 < x < \infty, 0 < t \leq T_2, T_2 \in \mathbb{R}\}$ üzerinde (7.13) sınır değer problemi olsun ve $G(u) = (u^q u_{xx})_x$, $L < \frac{\Gamma(\alpha-1)}{T_2^\alpha}$ ile Liptschitz koşulunu sağlasın. Bu takdirde (7.14) tek bir çözüme sahiptir.

İspat: Ω üzerinde tüm sürekli ve türevlenebilen fonksiyonlar kümesi ile birlikte bir tam normlu uzayı $\|f(x)\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ supremum normu ile verilsin. Ayrıca $Tu = u$ olsun. Böylece T dönüşümün büzülme dönüşümü olduğunu göstermek yeterlidir. u_1 ve u_2 , Ω üzerinde tanımlı iki sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \| Tu_1 - Tu_2 \| = \| u(0, x) + I_t^\alpha(\partial_x(u_1^q \partial_{xx} u_1)) - u(0, x) - I_t^\alpha(\partial_x(u_2^q \partial_{xx} u_2)) \| \\
& \leq \| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\partial_x(u_1^q \partial_{xx} u_1) - \partial_x(u_2^q \partial_{xx} u_2)) d\tau \| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \| \partial_x(u_1^q \partial_{xx} u_1) - \partial_x(u_2^q \partial_{xx} u_2) \| d\tau \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^\alpha}{\alpha} \| \partial_x(u_1^q \partial_{xx} u_1) - \partial_x(u_2^q \partial_{xx} u_2) \| \\
& \leq \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \| \partial_x(u_1^q \partial_{xx} u_1) - \partial_x(u_2^q \partial_{xx} u_2) \| \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} L \| u_1 - u_2 \| < \| u_1 - u_2 \|,
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu ise $\| Tu_1 - Tu_2 \| \leq \| u_1 - u_2 \|$ verir. Dolayısıyla T bir büzülme dönüşümüdür ve T tek sabit noktaya sahiptir. Buradan (7.10) problemin tek bir çözümü vardır.

$c_2 = c_4 = 0$ olduğundan

$$Y_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{q} u \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha}{q} u \frac{\partial}{\partial u},$$

iki tane sonsuz küçük operatörlerin altında (7.10) denklemi (7.11) başlangıç ve sınır koşulu ile değişmez olur. Birinci Y_1 operatörü $u = t^{-\frac{\alpha}{q}} h(x)$ dönüşümünü ve ikinci Y_2 operatörü ise $u = x^{\frac{3}{q}} l(t)$ dönüşümünü verir. Böylece başlangıç ve sınır problemi için çözümün tekliğinden, $u = t^{-\frac{\alpha}{q}} x^{\frac{3}{q}} c'$ şeklinde olup burada c' bir keyfi sabit olmak üzere.

- $q > 0$ için $u(t, 0) = 0$ olur, bu ise $k_3 = 0$ verir, böylece $t = 0$ noktasında blow-up (patlama) bulunup, $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-\frac{\alpha}{q}} x^{\frac{3}{q}} c' = +\infty$ biçimde yazılabilir.
- $q < 0$ durumda ise $u(0, x) = 0$ olur ve $k_4 = 0$, $x = 0$ noktasında blow-up (patlama) verir. Buradan $\lim_{x \rightarrow 0} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow 0} t^{-\frac{\alpha}{q}} x^{\frac{3}{q}} c' = +\infty$ şeklinde olur.

(7.10) denklemin çözümünü kontrol ederek

$$u(t, x) = \sqrt[q+1]{\frac{q^3 \Gamma(1 - \frac{\alpha}{q})}{3(3 - q)(3 + q) \Gamma(1 - \frac{\alpha}{q} - \alpha)}} t^{-\frac{\alpha}{q}} x^{\frac{3}{q}},$$

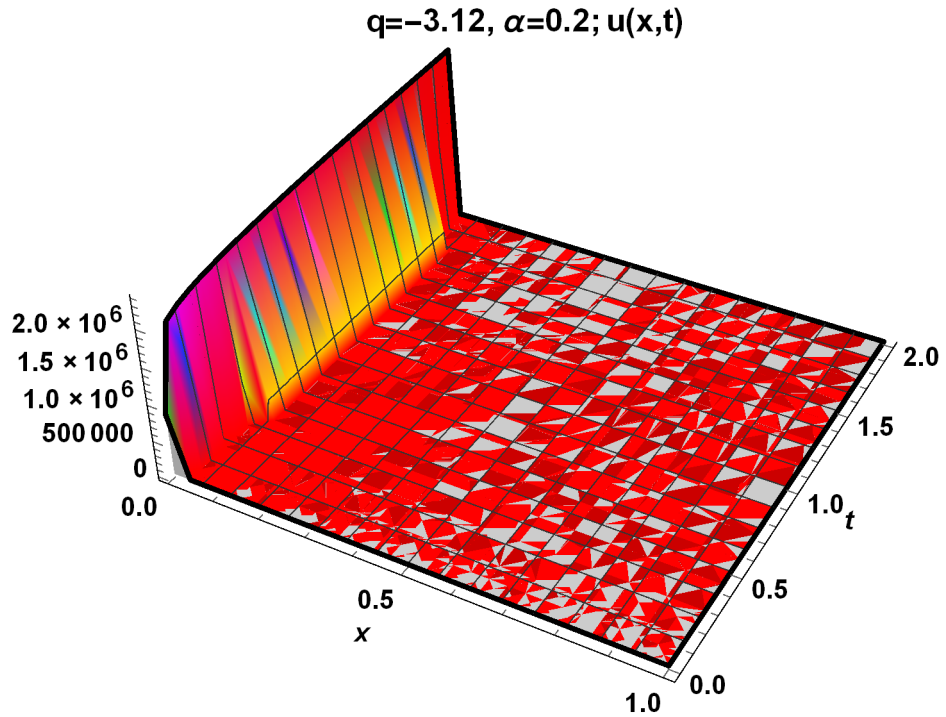
elde edilir. Bu fonksiyon

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u = (u^q u_{xx})_x, & q > 0, \\ u(t, 0) = 0, & t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = +\infty, & x > 0, \end{cases}$$

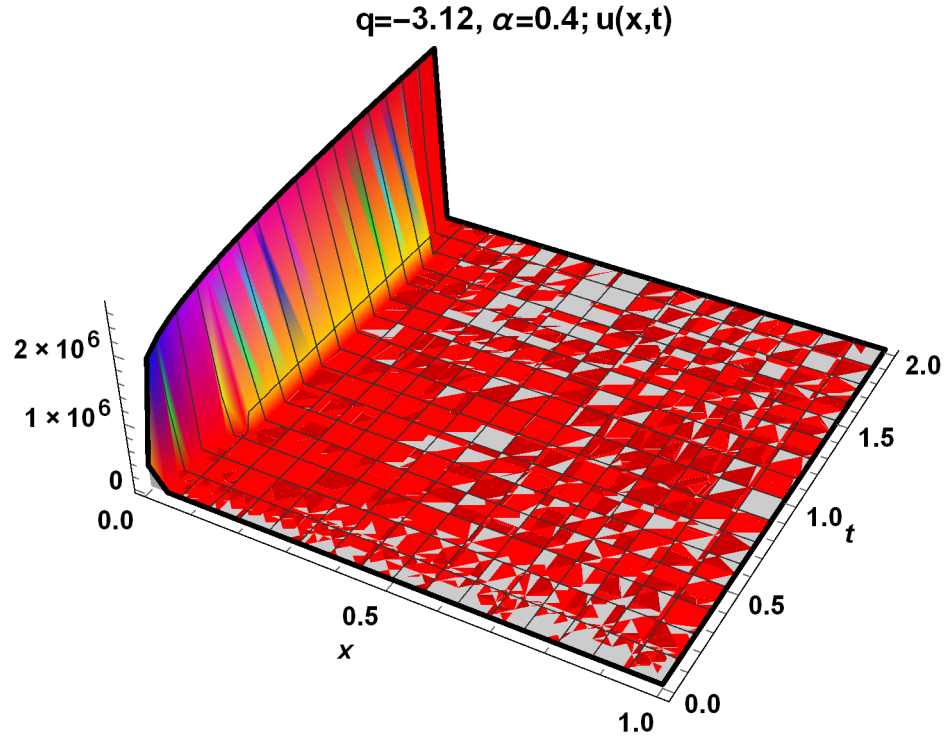
ve

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u = (u^q u_{xx})_x, & q < 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} u(t, x) = +\infty, & t > 0, \\ u(0, x) = 0, & x > 0, \end{cases}$$

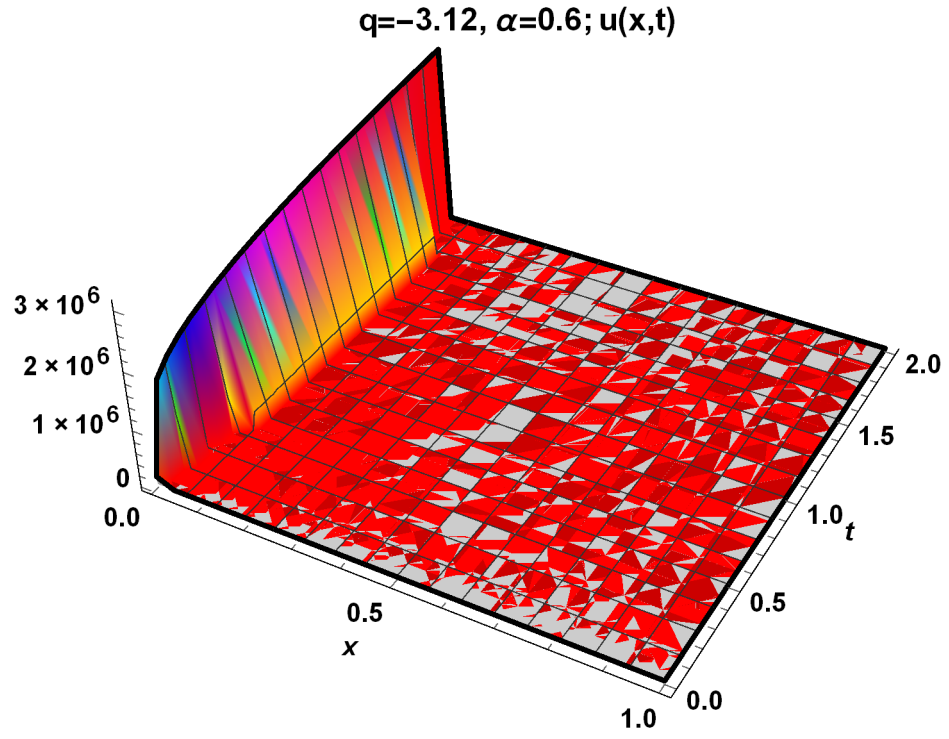
başlangıç ve sınır değer problemleri için bir çözümdür. Bu çözümüm grafiği $q = -3,12$ için Şekil 7.2’de gibidir. Burada benzer şekilde α değeri değıştikçe $u(x, t)$ potansiyelini etkilemektedir. Şekil 7.2’de görüldüğü gibi α değeri artıka $u(x, t)$ potansiyelinin genliğı artmaktadır. Yani $\alpha = 0,2$ için $u(x, t)$ genliğı $2 \cdot 10^6$ iken $\alpha = 0,8$ için $3 \cdot 10^6$ genliğıne ulaşmaktadır.



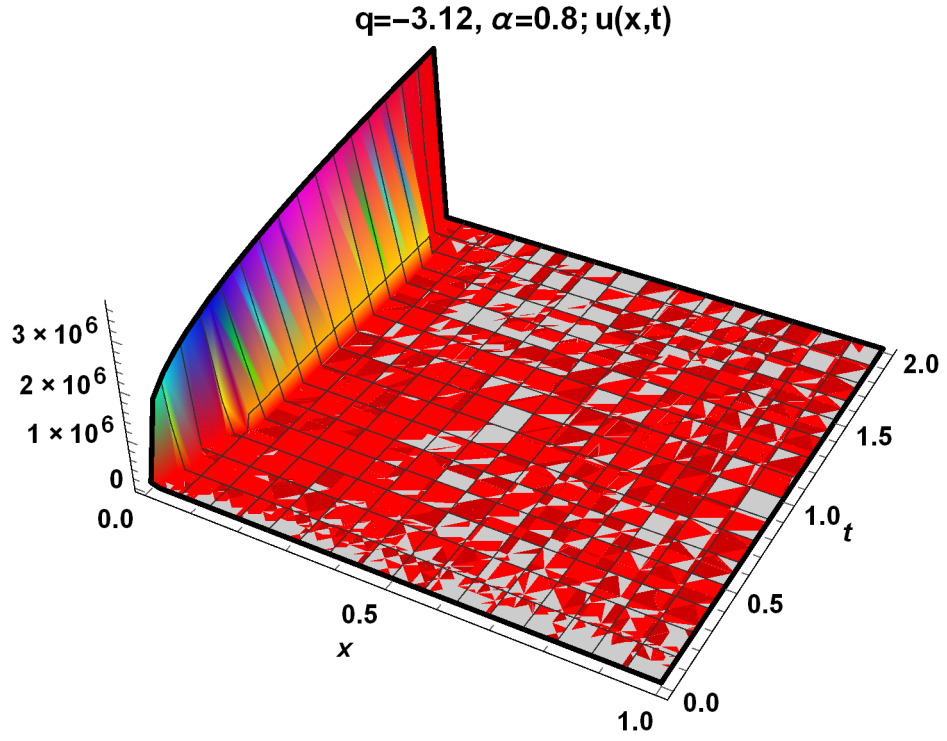
Şekil 7.2.(a) q negatif için çözüm



Şekil 7.2.(b) q negatif için çözüm



Şekil 7.2.(c) q negatif için çözüm



Şekil 7.2.(d) q negatif için çözüm

Böylece, difüzyon ve 3. mertebeden Caputo türev içeren denklemlere Lie grup yöntemini uygulayarak elde ettiğimiz sonsuz küçük üreteçleri bulduk. Bu üreteçlere karşılık gelen sonsuz küçük operatörleri kullanarak denklemlerin hangi başlangıç ve sınır değerleri ile değişmez olduğunu bulup, bu problemlerin çözümlerini elde ettik. Bununla birlikte çözümlerin tek olduğunu göstermek için Banach sabit nokta teoremine dayanarak iki teorem ispatladık.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Caputo türevi ile verilen başlangıç ve sınır değer problemlerinin simetri tanımını verip ispatladığımız teorem ile Caputo türevli KmDD'lerin başlangıç ve sınır değer problemleri için Lie grup teorisini oluşturduk.

Başarılı bir şekilde, ilk önce Riemann-Liouville türevli genelleştirilmiş KdV diferansiyel denklemler grubundan dalga denklemlerine Lie grup yönteminin uygulayarak bazı çözümleri ve korunum kanunlarını belirledik. Ardından Caputo türevi içeren zaman-kesirli Harry-Dym diferansiyel denklemi ile verilen başlangıç ve sınır değer probleme oluşturduğumuz Lie grup teorisinin uygulamasını gösterdik. Burada denklemlerin simetri olma gereksinimi sağlayacak özel başlangıç ve sınır koşullarını belirleyerek indirgenmiş denklemlerini sunduk.

Daha sonra önerilen Lie grup teorisini (7.6) ve (7.10) ile verilen Caputo türevi içeren zaman-kesirli difüzyon denklemlerin başlangıç ve sınır değer problemlere uygulayarak her bir problemin simetri olması için özel başlangıç ve sınır koşullarını belirledik ve cebirsel çözümlerini verdik. Bununla birlikte elde ettiğimiz çözümlerin tekliğini göstermek için iki teorem ispatladık. Bu çözümlerdeki sabitlere özel değer vererek herhangi bir andaki durağan dalgayı temsil eden grafikler sunduk.

KmKDD'lerin sınır değer problemleri için Lie grup yönteminin araştırmamıza göre verilen tanım ve ispatlanan teorem Caputo türevi için geçerli olup Riemann-Liouville türevi için geçerli olmadığını elde ettik. Kesirli türev içeren başlangıç ve sınır değer probleminin Lie grup teorisini oluştururken ispatladığımız teoremin Riemann-Liouville türevi için geçerli olmadığını gördük. Nedeni ise Riemann-Liouville türevi için $D_t^\alpha f(t) \neq I^{n-\alpha} D^n f(t)$ eşitliğinin doğru olmayışdır.

Çalışmamızdaki sonuçlara dayanarak başlangıç ve sınır değer probleminin değişmezliğinin tüm başlangıç ve sınır koşulları için yeterli olmadığını ve buna rağmen başlangıç ve sınır değer problemi için grup analizi çözüm bulma yolunu basitleştirebilecek kabiliyete sahip olduğunu gördük.

Ele alınan zaman-kesirli KdV, difüzyon ve 3. mertebeden diferansiyel denklemlere

ek olarak, gelecekte dikkate alınması gereken birçok ilginç Caputo türevli diferansiyel denklem ele alınıp bu veya benzer analizler yapılabilecektir. Bu problemlerden bazıları:

- Kesirli yapıya sahip gözenekli ortamlarda gerçek zamanlı hidrojeolojik tahmin problemleri,
- Termal süreçler,
- Kesirli türevli gecikme diferansiyel denklemleri,
- Kayıplı fiziksel sistemlerin evrimini tanımlayan kesirli türevli denklemler

gibidir.

Caputo türevli KmDD'lerin başlangıç sınır değer problemleri son on yılda geniş ölçüde tartışıldı, ancak bu problemlerin Lie simetri analizi ile ilgili daha yapılması gereken çok şey var. Örneğin, gelecekte Caputo ve Riemann-Liouville operatörler dışındaki diğer kesirli türev operatörlerine de benzer çalışmalar da yapılabilir. Her ne kadar çalışma teorik olsa da, çalışmanın sonuçları, çeşitli tipteki denklemler için yerel olmayan sınır değer problemlerinin genel teorisini daha da geliştirmek için kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Abd-el-Malek, M.B., Amin, A.M., 2015. Lie Group Method for Solving the Generalized Burgers', Burgers'-KdV and KdV Equations with Time-Dependent Variable Coefficients. *Symmetry*, 7, 1816–1830.
- Banach, S., 1922. On Operations in Abstract Sets and their Applications to Integral Equations. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133–181.
- Bluman, G.W., Kumei, S., 1996. *Symmetries and Differential Equations*. Springer-Verlag, 413, New York.
- Bluman, G.W., 1974. Applications of the General Similarity Solution of the Heat Equation to Boundary Value Problems. *Quarterly of Applied Mathematics*, XXXI, 403-415.
- Bluman, G.W., Anco, S., 2002. *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. Springer-Verlag, 422, Heidelberg.
- Cherniha R., Kovalenko S., 2011. Lie Symmetry of a Class of Nonlinear Boundary Value Problems with Free Boundaries. *Banach Center Publications*, 93, 95–104.
- Cherniha R., Kovalenko S., 2012. Lie Symmetries of Nonlinear Boundary Value Problems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 71–84.
- Das, Sh., 2011. *Functional Fractional Calculus*. Springer, 612, Germany.
- Diethelm, K., 2010. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer, 247, Germany.
- Drazin, P.G., Johnson, R.S., 1989. *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Elsgolts, L.E., Norkin, S.B., 1973. *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations, with Deviating Arguments*, Volume 105. *Mathematics in Science & Engineering*, Academic Press, 356, New-York.
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., 1967. Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation. *Physical Review Letters*, 19, 1095–1097.
- Gazizov, R.K., Kasatkin, A.A., Lukashchuk, S.Y., 2007. Continuous Transformation Group of Fractional Differential Equations. *Vestnik USATU*, 9, 125–135.
- Gazizov, R.K., Kasatkin, A.A., Lukashchuk, S.Y., 2009. Symmetry Properties of Fractional Diffusion Equations. *Physica Scripta*, 136, 014016.
- Gürsey, F., 1964. *Introduction to Group Theory in Relativity, Groups and Topology*. Gordon and Breach, New York.
- Hirota, R., Satsuma, J., 1981. Soliton Solutions of a Coupled KDV Equation. *Physics Letters A*, 85, 404–408.

- Hydon, P., 2000. Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide. Cambridge University press, 213, UK.
- İskenderoğlu, G., Kaya, D., 2019. On Lie Group Analysis of Boundary Value Problem with Caputo Fractional Derivative. Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 10(3), 369–376.
- İskenderoğlu, G., Kaya, D., 2019. Symmetry Analysis and Conservation Laws of the Boundary Value Problems for Time-Fractional Generalized Burgers' Differential Equation. Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 2(2), 139–147.
- İskenderoğlu, G., Kaya, D., 2020. Symmetry Analysis of Initial and Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations in Caputo Sense. Chaos, Solitons and Fractals, 134, 109684.
- Ibragimov, N.H., 2006. A New Conservation Theorem. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 333(1), 311–328.
- Ibragimov, N.H., 2011. Nonlinear Self-Adjointness and Conservation Laws. Journal of Physics A: Mathematical and General. 44(43), 4109–4112.
- Ibragimov, N., 1993. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume. I. CRC, 448.
- Iskandarova, G., Kaya, D., 2017. Symmetry Solution on Fractional Equation. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications, 7(3), 255–259.
- Kaya, D., 1999. On the Solution of a Korteweg-de Vries Like Equation by the Decomposition Method. International Journal of Computer Mathematics, 72, 531–539.
- Kaya, D., Gülbahar, S., Yokuş, A., 2017. Numerical Solutions of the Fractional KdV-Burgers-Kuramoto Equation. Thermal Science, 1(0), 281–281.
- Kaya, D., Iskandarova, G., 2019. Lie Group Analysis for Initial and Boundary Value Problem of Time-Fractional Nonlinear Generalized KdV Partial Differential Equation. Turkish Journal of Mathematics, 43(3), 1263–1275.
- Kaya, D., Yokuş, A., Demiroğlu, U., 2020. Comparison of exact and numerical solutions for the Sharma–Tasso–Olver equation. Numerical Solutions of Realistic Nonlinear Phenomena, Springer, Cham, 53–65.
- Kexue, L., Jigen, P., 2011. Laplace Transform and Fractional Differential Equations. Applied Mathematics Letters, 24, 2019–2023.
- Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., 2006. Theory And Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science, 540.
- Klein, F., 1872. Vergleichende Betrachtungen Über Neuere Geometrische Forschungen. Erlangen: Verlag von Andreas Deichert, 48, Germany.

- Lie, S., 1888. *Theorie Der Transformations Gruppen*. Benedictus Gotthelf Teubner, 632, Germany.
- Lorentz, H. A. 1904. Electromagnetic Phenomena in a System Moving with Any Velocity Smaller Than That of Light. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings*, 6, 809–831.
- Miller, K.S., Ross, B., 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley, 384, USA.
- Nishimoto, K., 1991. *An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus*. Descartes Press Co., 208, UK.
- Noether, E., 1918. Invariante Variationsprobleme. *Königlich Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen Nachrichten Mathematik-Physik Klasse*, 2, 235–267.
- Oldham, K.B., Spanier, J., 1974. *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Volume 111. Academic Press, New York, 322, USA.
- Olver, P., 2012. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer Science, 513, Germany.
- Ovsyannikov, L.V., 1958. Groups and Invariant-Group Solutions of Differential Equations. *Dokladi Akademii Nauki SSSR*, 118(3), 439–442.
- Ovsyannikov, L.V., 1982. *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press, New York, 432, USA.
- Özkan, O., Kurt, A., 2018. The Analytical Solutions for Conformable Integral Equations and Integro-Differential Equations by Conformable Laplace Transform. *Optical and Quantum Electronics*, 50, Article number: 81.
- Parkes, E.J., Duffy, B.R., 1997. Travelling Solitary Wave Solutions to a Compound KdV-Burgers Equation. *Physics Letters A*, 229, 217–220.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York, 340, USA.
- Reed, M., Simon, B., 1980. *Functional Analysis*. Academic Press, New York, 400, USA.
- Samko, S., Kilbas, A., Marichev, O., 1993. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory of Applications*. Gordon and Beach Science Publishers, 1006, Amsterdam.
- Tarasov, V.E., 2006. Gravitational Field of Fractal Distribution of Particles. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 19, 1–15.
- Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A., 1963. *Equations of Mathematical Physics*. Oxford Pergamon Press, 776, USA.

- Uchaikin, V.V., 2013. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers: Volume I Background and Theory Volume II Applications. Springer-Verlag Berlin, 385, Heidelberg.
- Ugurlu, Y. , Kaya, D., 2008. Solutions of the Cahn–Hilliard Equation. Computers and Mathematics with Applications, 56, 3038–3045.
- Yavuz, M., Yokuş, A., 2020. Analytical and numerical approaches to nerve impulse model of fractional-order. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 1–21.
- Yokus, A., 2017. An Application of a New Version of $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Expansion Method. AIP Conference Proceedings 1798, 020165.
- Yokuş, A., Kaya, D., 2015. Conservation laws and a new expansion method for sixth order Boussinesq equation. AIP Conference Proceedings. Vol. 1676. No. 1. AIP Publishing LLC.
- Yokuş, A., Kaya, D., 2017. Numerical and Exact Solutions for Time Fractional Burgers Equation. Journal of Nonlinear Sciences and its Applications, 10(7), 3419–3428.
- Yokuş, A., 2020. On the exact and numerical solutions to the FitzHugh–Nagumo equation. International Journal of Modern Physics B: 2050149.
- Zhang, S., 2007. Application of Exp-Function Method to a KdV Equation with Variable Coefficients. Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics, 365, 448–453.
- Zelenyi, L.M., Milovanov, A.V., 2004. Fractal Topology and Strange Kinetics: from Percolation Theory to Problems in Cosmic Electrodynamics Problems. Achievement of Physical Sciences, 174(8), 809–852.
- Wang, M.L., 1995. Solitary Wave Solutions for Variant Boussinesq Equations. Physics Letters A, 199(3-4), 169–172.
- Wang, M., Li, X., Zhang, J., 2008. The $\left(\frac{G'}{G}\right)$ -Expansion Method and Traveling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. Physics Letters A, 372, 417–423.
- Wu, G., Lee, E.W.M., 2010. Fractional Variational Iteration Method and its Application. Physics Letters A, 374, 2506–2509.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gülistan İSKENDEROĞLU
Doğum Yeri ve Yılı : KAZAKİSTAN, 25/08/1989
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce, Rusça, Kazakça
E-posta : gulistan.iskandarova@istanbulticaret.edu.tr



Eğitim Durumu

Lise : Bekmakhanov Lisesi, Kazakistan, 2007
Lisans : M. Kozybayev Kuzey Kazakistan Devlet Üniversitesi, Bilgi Teknolojileri Fakültesi, Matematik Bölümü, Kazakistan, 2011
Yüksek Lisans : L.N. Gumilyov Avrasya Milli Üniversitesi, Mekanik ve Matematik Fakültesi, Temel Matematik Bölümü, Kazakistan, 2013
Doktora : İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Türkiye, 2020

Mesleki Deneyim

L.N. Gumilyov Avrasya Milli Üniversitesi
Fonksiyonel Analiz, Uygulama dersleri 2012-2013
İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fonksiyonel Analiz ve Diferansiyel Denklemler, Uygulama dersleri 2019-2020

Yayınları

İskenderoğlu, G., Kaya, D., 2020. Symmetry Analysis of Initial and Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations in Caputo Sense. Chaos, Solitons and Fractals, 134, 109684.
İskenderoğlu, G., Kaya, D., 2019. Symmetry Analysis and Conservation Laws of the Boundary Value Problems for Time-Fractional Generalized Burgers' Differential Equation. Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 2(2), 139–147.

İskenderoğlu, G., Kaya, D., 2019. On Lie Group Analysis of Boundary Value Problem with Caputo Fractional Derivative. Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 10(3), 369–376.

Iskandarova, G., Kaya, D., 2017. Symmetry Solution on Fractional Equation. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications, 7(3), 255–259.

Kaya, D., Iskandarova, G., 2019. Lie Group Analysis for Initial and Boundary Value Problem of Time-Fractional Nonlinear Generalized KdV Partial Differential Equation. Turkish Journal of Mathematics, 43(3), 1263–1275.

Projeleri

Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler için Klasik Dönüşüm Yöntemleri ve Uygulamaları, YAPKK, 22-2018/34, (2018- 2019)