УДК 539.3

Термический анализ микрополярной среды при вращении на основе двухтемпературной микрополярной модели термоупругости с высшими производными по времени

A.E. Abouelregal[1,2], R. Alanazi[1], A.H. Sofiyev[3,4,5], H.M. Sedighi[6]

[1] Университет Джуфа, Аль-Курайят, 75911, Саудовская Аравия
[2] Университет Мансура, Мансура, 35516, Египет
[3] Университет им. Сулеймана Демиреля, Испарта, 32260, Турция
[4] Стамбульский коммерческий университет, Стамбул, 34445, Турция
[5] Азербайджанский государственный экономический университет, Баку, 1001, Азербайджан
[6] Университет Шахида Чамрана в Ахвазе, Ахваз, 61357-43337, Иран

В работе исследовано распространение плоских волн в однородной микрополярной термоупругой среде при вращении тела с равномерной угловой скоростью. Система координат во вращающейся среде предполагается стационарной, что приводит к появлению в кинематических уравнениях двух дополнительных членов, а именно гравитационного ускорения и ускорения Кориолиса. Задача решается на основе двухтемпературной модели термоупругости с высшими производными по времени и двухфазным запаздыванием, которая позволяет описать влияние особенностей микроструктуры в сложных материалах. С использованием определенных граничных условий и приближения собственных мод описано изменение температуры, перемещений, микроповорота и термических напряжений при нагреве. Для случая отсутствия вращения и двухтемпературного коэффициента проведено сравнение с результатами классических моделей термоупругости.

Ключевые слова: микрополярный, двухтемпературная модель термоупругости, вращающиеся микроструктуры, фазовое запаздывание, высшие производные по времени

DOI 10.55652/1683-805X_2023_26_1_15

Thermal analysis of a rotating micropolar medium using a two-temperature micropolar thermoelastic model with higher-order time derivatives

A.E. Abouelregal[1,2], R. Alanazi[3], A.H. Sofiyev[4,5,6], and H.M. Sedighi[7,8]

[1] Department of Mathematics, College of Science and Arts, Jouf University, Al-Qurayat, 75911, Saudi Arabia
[2] Department of Mathematics, Faculty of Science, Mansoura University, Mansoura, 35516, Egypt
[3] Department of Computer Science, College of Science and Arts, Jouf University, Al-Qurayat, 75911, Saudi Arabia
[4] Department of Civil Engineering, Engineering Faculty, Suleyman Demirel University, Isparta, 32260, Turkey
[5] Information Technology Research and Application Center, Istanbul Commerce University, Beyoglu, Istanbul, 34445, Turkey
[6] Scientific Research Center for Composition Materials, Azerbaijan State Economic University, Baku, 1001, Azerbaijan
[7] Faculty of Engineering, Mechanical Engineering Department, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, 61357-43337, Iran
[8] Drilling Center of Excellence and Research Center, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, 61357-43337, Iran

In this work, the propagation of planar waves in a homogeneous micropolar thermoelastic medium is studied while the entire body rotates with a uniform angular speed. The coordinate system of the rotating medium is assumed to be stationary, and therefore the kinematic equations have two additional terms, namely, the gravitational and the Coriolis accelerations. The problem is addressed based on the two-temperature thermoelastic model with higher-order time derivatives and dual-phase lag, which can explain the effect of microscopic features in nonsimple materials. With certain boundary conditions and the normal mode approach, the variations in temperature, displacement, microrotation, and thermal stresses induced by heating are derived. In the absence of rotation and two-temperature factor, comparison is made with the results of classical thermoelastic models.

Keywords: micropolar, two-temperature thermoelasticity, rotating microstructures, phase lag, higher-order time derivatives

© Abouelregal A.E., Alanazi R., Sofiyev A.H., Sedighi H.M., 2023

1. Введение

Распространение термомеханических волн в упругих средах имеет теоретическое и практическое значение во многих научных областях. В последние десятилетия возрос интерес к изучению поведения волн в твердых телах при различных условиях, например при вращении [1]. Например, в [2] теоретически и экспериментально исследовано распространение волн от источника тепла в изотропной упругой среде, вращающейся с постоянной скоростью. Для получения полной информации о скорости распространения волн в упругой среде необходимо изучение плоских волн. Сложной проблемой является описание распространения волн, вызванных локальным возмущением, и уменьшения амплитуды волн по мере удаления от источника возмущения. В настоящем исследовании решается задача о распространении поверхностной волны во вращающейся упругой среде. Следует отметить, что поверхностные волны возникают в медленно вращающихся средах, где скорость поверхностных волн выше. Например, волны Рэлея в среде ведут себя подобно сейсмическим волнам, распространяющимся по поверхности Земли [3]. В последние годы распространение упругих, а также тепловых волн во вращающейся среде активно изучается на основе разных моделей с учетом различных условий [4–10].

В 1837 г. Ж.-М. Дюамель разработал связанную теорию термоупругости с учетом влияния тепловых полей на деформацию. Ж.-Б. Био [11] ввел связанную теорию термоупругости с основными уравнениями, полученными из закона Фурье, т.е. на основе термодинамики необратимых процессов. В соответствии с данной концепцией, система определяющих уравнений (уравнение теплопроводности) имеет параболический тип. Другими словами, тепловые волны распространяются в среде с бесконечными скоростями, что противоречит природе физических явлений.

Рядом авторов были предложены модели термоупругости, которые позволяют получить гиперболические уравнения теплопроводности с конечной скоростью тепловых волн. Это обобщенная теория Лорда–Шульмана [12], модель Грина–Линдсея, в которой определяющие соотношения между напряжениями и энтропией обобщаются за счет учета двух альтернативных коэффициентов релаксации [13], модели Грина–Нагди I, II и III типа, которые позволяют применять теорию термоупругости для однородных материалов [14–16]. Дальнейшим расширением теории термоупругости является модель с двухфазным запаздыванием Цзоу [17–19]. За счет включения двухфазного запаздывания в вектор теплового потока и в градиент температуры было получено основное уравнение для описания замедленного тепло- и массопереноса в различных материалах, а также особенностей микроструктуры, таких как электрон-фононное взаимодействие и рассеяние фононов [17–19].

В [20–24] разработаны математические модели, описывающие процесс теплообмена в упругих телах с использованием высших производных по времени и фазового запаздывания. Эти модели являются расширением механических основ теорий теплообмена Грина–Нагди [15, 16], модели с трехфазным запаздыванием Чоудхури [25], а также моделей Цзоу [17–19]. Разработанные модели высоких порядков с фазовым запаздыванием обеспечивают теоретическую основу для изучения процессов теплопереноса с учетом различных особенностей микроструктуры, позволяя прогнозировать тепловое поведение конструкций на основе многомасштабной модели.

В работах [26–28] представлена двухтемпературная теория термоупругости. В данной модели неравенство Клаузиуса–Дюгема преобразовано путем введения двух разных температур: связанной с проводимостью и термодинамической. Температура проводимости обусловлена тепловым процессом, а термодинамическая температура связана с диссипацией механической энергии при взаимодействии частиц и упругой матрицы. Считается, что разность данных температур пропорциональна количеству подведенного тепла, а в отсутствие подвода тепла они равны. Разница между температурами отсутствует в простых веществах и, наоборот, присутствует в сложных материалах. В [29] обсуждается существование, структурная устойчивость, конвергенция и пространственное поведение решений двухтемпературной модели термоупругости. Модификациями рассматриваемой теории являются обобщенная теория термоупругости с одним коэффициентом релаксации [30], двухтемпературная модель термоупругости с производными по времени высших порядков и тремя различными фазовыми запаздываниями [20]. В [31] на основе метода пространства состояний получена модель одномерных уравнений для обобщенной двухтемпературной теории магнитотермоупругости в идеальной электропроводной среде с двумя временами релакса-

ции. В [32] представлена обобщенная теория термоупругости с двумя температурами и двухфазным запаздыванием. В последние десятилетия активно исследуются различные аспекты двухтемпературных теорий термоупругости [33–36].

Микрополярная теория упругости, также известная как теория упругости Коссера или микрополярная теория механики сплошной среды, учитывает, что при вращении локальной точки, наряду с перемещением согласно классической теории упругости, на единице площади действуют силовые и моментные напряжения. В общепринятой теории упругости под напряжением подразумевается силовое напряжение ввиду отсутствия других его видов. Концепция моментного напряжения восходит к ранней работе Фойгта по теории упругости. Недавно разработанные теории моментных напряжений используют весь спектр возможностей механики сплошной среды. Поскольку значение коэффициента интенсивности напряжений снижается вблизи отверстий и трещин, обобщенные концепции сплошной среды, такие как теория упругости Коссера, применимы для описания характеристик материала [37].

В последние годы микрополярная теория упругости Эрингена [38] привлекает большое внимание ученых, поскольку в отличие от классической теории позволяет подробно описывать деформационное поведение твердых тел. Микрополярная теория особенно эффективна при изучении материалов, состоящих из вытянутых молекул, испытывающих микроповорот под действием объемных и поверхностных моментов, которые вызваны действием вектора силы на поверхности тела. Микрополярный континуум представляет собой совокупность связанных частиц, которые принимают форму твердых тел малого размера и способны вращаться, наряду с обычным поступательным движением [37].

Линейное описание микрополярной термоупругости было получено при учете влияния температуры в концепции микрополярного континуума. Микрополярная теория термоупругости основана на включении термоупругих свойств в понятие микрополярности [39, 40]. Основные уравнения математической модели микрополярной термоупругости представлены в работе [41].

С использованием модели Грина–Линдсея были построены уравнения обобщенной микрополярной теории термоупругости [42]. Уравнение энергетического баланса и теорема единственности для анизотропных материалов получены на основе микрополярной модели термоупругости, в которой определяющие переменные зависят от характеристик теплового потока [43]. Основы трехфазной микрополярной теории термоупругости сформулированы в работе [44]. Авторы установили вариационный принцип для линейного анизотропного и неоднородного термоупругого тела, доказав теоремы взаимности и единственности. В [45] представлена математическая модель магнитного микрополярного термоупругого полупространства с температурно-зависимыми свойствами материала под действием механической полосовой нагрузки. Ряд исследований посвящен детальной разработке микрополярной теории термоупругости [46–53].

В настоящей работе обсуждается модифицированная микрополярная модель термоупругости с высшими производными по времени и двухфазным запаздыванием. Наряду с учетом влияния микроструктуры в процессе теплообмена, предлагаемая модель учитывает также влияние макроструктуры в предположении, что электрон-фононные отклики приводят к задержке роста температуры кристаллической решетки на макромасштабном уровне. При дальнейшем построении модели осуществляется разложение в ряд Тейлора выражения закона Фурье и устанавливается корреляция между двумя температурами при сохранении условий фазового запаздывания вплоть до допустимых членов более высокого порядка.

Предлагаемая модель с фазовым запаздыванием является расширением двухтемпературной модели термоупругости с одним временем релаксации [30] и двухфазным запаздыванием [32]. В предыдущих работах установлено, что двухтемпературные модели термоупругости более применимы к решению практических задач физики. По мере накопления практических и теоретических знаний обобщенные теории термоупругости с высшими производными по времени смогут найти применение в современных приложениях.

На основе предложенной модели изучено распространение тепловой волны в изотропном микрополярном полупространстве, вращающемся с постоянной угловой скоростью, внешняя поверхность которого является свободной. Получены выражения для термодинамической температуры, температуры проводимости, микроповорота, перемещений и термических напряжений, а также исследованы распределения физических переменных.

2. Математическая модель и основные уравнения

Введем уравнения, описывающие бесконечную микрополярную среду в рамках двухтемпературной модели теплопроводности с фазовым запаздыванием и высшими производными по времени. В качестве определяющих уравнений используем основные размерно-зависимые уравнения Эрингена [40] в отсутствие объемных сил и моментов, источников тепла и уравновешенной внешней силы [54–56]:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + (\mu+\alpha)\varepsilon_{ij} + \mu\varepsilon_{ji} - \gamma\theta\delta_{ij}, \tag{1}$$

$$m_{ij} = \varepsilon\omega_{k,k}\delta_{ij} + (\upsilon+\beta)\omega_{j,i} + (\upsilon-\beta)\omega_{i,j}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}). \tag{3}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; u_i — компоненты вектора перемещений; ω_{ik} — компоненты вектора микроповорота; m_{ij} — компоненты тензора моментных напряжений; λ, μ, α, υ, β и ε — константы материала; δ_{ij} — дельта-функция Кронекера; ε_{ij} — компоненты тензора малых деформаций; ω_i — компоненты поворота; $\theta = T - T_0$ — изменение температуры выше начальной температуры T_0; γ — постоянная материала, определяемая выражением $\gamma = (3\lambda + 2\mu + \alpha)\alpha_t$.

Уравнения движения и баланса количества движения имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + m_{ji,j} = \rho j\ddot{\omega}_{,i},\ i, j, k = 1, 2, 3, \tag{5}$$

где ε_{ijk} — символ перестановки; ρ — плотность; j — микроинерция.

Используя определяющие уравнения (1), (2), исключим напряжения σ_{ij}, m_{ij} из уравнений движения (4), (5) и получим

$$\left[(\mu+\alpha)\nabla^2 - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{u} + (\lambda+\mu-\alpha)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + 2\alpha\nabla\times\boldsymbol{\omega} = \gamma\nabla\theta, \tag{6}$$

$$\left[(\upsilon+\beta)\nabla^2 - \rho j\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{\omega} + (\varepsilon+\upsilon-\beta)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}) + 2\alpha\nabla\times\mathbf{u} = 4\alpha\boldsymbol{\omega} = 0. \tag{7}$$

Уравнение энергии запишем в виде

$$\rho C_E\frac{\partial\theta}{\partial t} + \gamma T_0\frac{\partial\theta}{\partial t}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) = -\nabla\cdot\mathbf{q} + \rho Q, \tag{8}$$

где C_E — удельная теплоемкость; $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока. Классический закон Фурье выразим как

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -K\nabla\theta(\mathbf{x}, t), \tag{9}$$

где $\mathbf{x}$ — радиус-вектор, а K — коэффициент теплопроводности.

Сложное вещество, согласно работам [27, 28], представляет собой материал, в котором напряжение, энергия, энтропия, тепловой поток и термодинамическая температура в конкретный момент времени зависят от величин градиента деформации, температуры проводимости и ее градиента до данного момента времени. В [57] обычный закон Фурье (9) был преобразван в соответствии с двухтемпературной концепцией к виду

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -K\nabla\varphi(\mathbf{x}, t), \tag{10}$$

где K — теплопроводность; φ — температура проводимости, измеренная при постоянной начальной температуре φ_0, которая удовлетворяет соотношению

$$\varphi - \theta = a\nabla^2\varphi, \tag{11}$$

где $a > 0$ — двухтемпературный коэффициент.

В работах [32, 58] предложена модель теплопроводности с двухфазным запаздыванием, объединенная с двухтемпературной теорией за счет учета микроструктурных эффектов в процессе теплопередачи:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t + \tau_q) = -K\nabla\varphi(\mathbf{x}, t + \tau_\varphi), \tag{12}$$

где τ_q и τ_φ — фазовые запаздывания теплового потока и градиента температуры проводимости соответственно.

Выполним разложение в ряд Тейлора для обеих частей уравнения (12) отдельно по фазовым запаздываниям τ_q и τ_φ до членов достаточно высоких порядков m и n соответственно [20, 21]:

$$\left(1 + \sum_{r=1}^{m}\frac{\tau_q^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right)\mathbf{q} = -K\left(1 + \sum_{r=1}^{n}\frac{\tau_\varphi^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right)\nabla\varphi. \tag{13}$$

Объединив (13) с уравнением энергии (8), получим модифицированное уравнение для теплопроводности высокого порядка с двумя температурами:

$$K\left(1 + \sum_{r=1}^{n}\frac{\tau_\varphi^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right)\nabla^2\varphi = \left(1 + \sum_{r=1}^{m}\frac{\tau_q^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right) \times\left(\rho C_E\frac{\partial\theta}{\partial t} + \gamma T_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\,\mathbf{u}) - \rho Q\right). \tag{14}$$

Ограничения на термомеханические параметры изотропного объекта удовлетворяют следующим неравенствам:

$$3\lambda + 2\mu > 0,\ \mu > 0,\quad \mu + \alpha > 0,\ \gamma + \varepsilon > 0,\ \alpha, \gamma, \varepsilon > 0. \tag{15}$$

Авторы [59–61] выявили определенные ограничения на использование более высоких порядков m и n. Например, при $m \geq 5$ получается неустойчивая система, которая не может описывать реальные физические свойства. В любом случае, когда порядок аппроксимации меньше или равен четырем, необходимо проверять соответствие второму закону термодинамики.

Будем считать, что однородная микрополярная среда равномерно вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Pi} = \Pi \mathbf{n}$, где вектор $\mathbf{n}$ указывает направление оси вращения. Под действием вращения возникают центробежное ускорение $\mathbf{\Pi} \times (\mathbf{\Pi} \times \mathbf{u})$ и ускорение Кориолиса $2\mathbf{\Pi} \times \dot{\mathbf{u}}$. Тогда уравнения динамики (6) и баланса количества движения (7) в условиях микрополярности и вращения принимают вид

$$\left[(\mu+\alpha)\nabla^2 - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{u} + (\lambda+\mu-\alpha)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + 2\alpha\nabla\times\boldsymbol{\omega} = \gamma\nabla\theta + \rho\mathbf{\Pi}\times(\mathbf{\Pi}\times\mathbf{u}) + 2\rho\mathbf{\Pi}\times\dot{\mathbf{u}}, \quad (16)$$

$$\left[(\upsilon+\beta)\nabla^2 - \rho j\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{\omega} + (\varepsilon+\upsilon-\beta)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}) + 2\alpha\nabla\times\mathbf{u} = 4\alpha\boldsymbol{\omega} + \rho j\mathbf{\Pi}\times\dot{\boldsymbol{\omega}}. \quad (17)$$

2.1. Частные случаи

На основе полученной системы уравнений можно построить различные одно- и двухтемпературные модели термоупругости с микрополярным эффектом и без него.

2.1.1. Случай 1

При отсутствии микрополярного эффекта ($\varepsilon = \upsilon = \beta = 0$) могут быть получены следующие варианты одно- и двухтемпературных моделей термоупругости:

– классическая модель термоупругости (CTE) [11] при $\tau_q = \tau_\varphi = 0$, $a = 0$, $\theta = \varphi$;

– обобщенная модель термоупругости Лорда–Шульмана (LS) [12] при $\tau_q = \tau_0 > 0$, $a = 0$, $\theta = \varphi$, τ_q, $\tau_\varphi \to 0$ и $m = 1$;

– модель термоупругости с двухфазным запаздыванием (DPL) [18, 19] при $a = 0$, τ_q, $\tau_\varphi > 0$, $n = 1$ и $m = 2$;

– двухтемпературная модель термоупругости с двухфазным запаздыванием (2DPL) [32] при $a > 0$, $\tau_\theta = \tau_\varphi$, $m = n = 1$;

– обобщенная двухтемпературная модель с одним временем релаксации (2LS) [30] при $a > 0$, $\tau_\varphi = 0$, $\tau_q = \tau_0 > 0$, $m = n = 1$;

– обобщенная двухтемпературная модель термоупругости с двухфазным запаздыванием с производными высокого порядка (2HDPL) [20] при $a > 0$, τ_q, $\tau_\varphi > 0$, n, $m \geq 1$.

2.1.2. Случай 2

С учетом микрополярности можно получить такие же одно- или двухтемпературные модели термоупругости, как и в предыдущем случае. Далее такие модели будем обозначать добавлением буквы M в название модели (2MLS, 2MDPL, 2MHDPL, MTTLS и MHTTE).

3. Постановка задачи

Рассмотрим полупространство из однородного микрополярного материала. Изначально среда не деформируется и не сжимается, находясь при постоянной температуре T_0. Граница среды при $y = 0$ свободна от усилий и подвергается воздействию источника тепла, мощность которого уменьшается со временем и который влияет на узкую область вокруг оси x. Задача решается в декартовой системе координат (x, y, z), начало которой находится на верхней поверхности $y = 0$, а ось y направлена внутрь полупространства. Распространение плоской волны в плоскости задается одинаковым смещением частиц вдоль линии, параллельной оси z. В результате все рассматриваемые поля являются только функциями переменных x, y и t и не зависят от координаты z. Исходя из этих предположений, запишем выражения для компонент вектора перемещений и микроповорота:

$$u_x = (x, y, t),\ u_y = v(x, y, t),\ u_z = 0, \qquad \boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0). \quad (18)$$

Тогда, объемное расширение e в плоскости xy описывается уравнением

$$e = \varepsilon_{kk} = \operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (19)$$

Предполагается, что среда вращается с равномерной угловой скоростью $\mathbf{\Pi} = (0, 0, \Pi)$. Соответственно, уравнения движения (16) и баланса количества движения (17) для двумерной задачи сводятся к

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial x} + (\mu+\alpha)\nabla^2 u - \gamma\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\alpha\frac{\partial\omega}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho\Pi^2 u, \quad (20)$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial e}{\partial y} + (\mu+\alpha)\nabla^2 v$$

$$-\gamma\frac{\partial\theta}{\partial y}-2\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\rho\Pi^2 v, \tag{21}$$

$$(\upsilon+\beta)\nabla^2\omega+2\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-4\alpha\omega=\rho j\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}. \tag{22}$$

Уравнение теплопроводности высшего порядка (14) с двумя температурами имеет вид

$$K\left(1+\sum_{r=1}^{n}\frac{\tau_\varphi^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right)\nabla^2\varphi=\left(1+\sum_{r=1}^{m}\frac{\tau_q^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right)\times\left(\rho C_E\frac{\partial\theta}{\partial t}+\gamma T_0\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial t}\right). \tag{23}$$

Определяющие соотношения (1), (2) в плоскости xy записываются как

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+2\mu+\alpha & \lambda & \gamma\\ \lambda & \lambda+2\mu+\alpha & \gamma\\ \lambda & \lambda & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial u/\partial x\\ \partial v/\partial y\\ \theta\end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xy}\\ \sigma_{yx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu+\alpha & \mu-\alpha & -2\alpha\\ \mu-\alpha & \mu+\alpha & 2\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial v/\partial x\\ \partial u/\partial y\\ \omega\end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix}m_{zx}\\ m_{zy}\end{bmatrix}=(\upsilon-\beta)\begin{bmatrix}\partial\omega/\partial x\\ \partial\omega/\partial y\end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$m_{zx}=(\upsilon-\beta)\frac{\partial\omega}{\partial y}=(\upsilon-\beta)m_{yz}, \tag{27}$$

$$\varphi-\theta=a\nabla^2\varphi,\ \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{28}$$

Приведенные выше основные уравнения можно использовать для постановки любых граничных условий. В настоящей работе рассматривается микрополярная термоупругая полуобласть со свободной поверхностью под действием зависящего от времени источника тепла, который воздействует на узкую область вокруг оси абсцисс. Зададим соответствующие механические граничные условия

$$\sigma_{yy}(x,y,t)=\sigma_{xy}(x,y,t)=0 \text{ при } y=0, \tag{29}$$

$$m_{yz}(x,y,t)=0 \text{ при } y=0 \tag{30}$$

и тепловое граничное условие

$$\varphi(x,y,t)=\varphi_0 H(L-|x|)\exp(-bt) \text{ при } y=0, \tag{31}$$

где φ_0 — константа; $H(.)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Данное соотношение указывает на то, что ширина области воздействия приложенной термомеханической нагрузки не равна нулю только в направлении оси x.

4. Методика решения

Для сокращения числа переменных в системе уравнений и обобщения задачи определим следующие безразмерные величины:

$$\begin{gathered}\{x',y',u',v'\}=\frac{c_1}{\eta}\{x,y,u,v\},\ \{\theta',\varphi'\}=\frac{\gamma}{\rho c_1^2}\{\theta,\varphi\},\\ \left\{t',\tau_q',\tau_\theta',\frac{1}{\Pi'}\right\}=\frac{c_1^2}{\eta}\left\{t,\tau_q,\tau_\theta,\frac{1}{\Pi}\right\},\\ \sigma_{ij}'=\frac{\sigma_{ij}}{\alpha+\mu},\ m_{ij}'=\frac{\alpha\eta m_{ij}}{c_1(\alpha+\mu)(\upsilon+\beta)},\\ \omega'=\frac{\alpha\omega}{\alpha+\mu},\ c_1^2=\frac{\lambda+2\mu+\alpha}{\rho},\ \eta=\frac{k}{\rho C_E}.\end{gathered} \tag{32}$$

Опустив штрихи и используя безразмерные переменные, перепишем уравнения движения и баланса количества движения (20)–(22) и модифицированное уравнение (23):

$$\beta_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta_2^2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\beta_1^2\frac{\partial\theta}{\partial x}+2\frac{\partial\omega}{\partial y}=\beta_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\beta_1^2\Pi^2 u, \tag{33}$$

$$\beta_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\beta_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\beta_1^2\frac{\partial\theta}{\partial y}+2\frac{\partial\omega}{\partial x}=\beta_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\beta_1^2\Pi^2 v, \tag{34}$$

$$\nabla^2\omega+g_1\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-g_2\omega=g_3\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}, \tag{35}$$

$$\left(1+\sum_{r=1}^{n}\frac{\tau_\varphi^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right)\nabla^2\varphi=\left(1+\sum_{r=1}^{m}\frac{\tau_q^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right)\times\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+g\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial t}\right), \tag{36}$$

где

$$\begin{gathered}\beta_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\alpha+\mu},\ \beta_2^2=\beta_1^2-1,\ g_1=\frac{2\alpha^2\eta^2}{c_1^2(\alpha+\mu)(\upsilon+\beta)},\\ g_2=\frac{4\alpha\eta^2}{c_1^2(\upsilon+\beta)},\ g_3=\frac{\rho j c_1^2}{\upsilon+\beta},\ g=\frac{\eta\gamma^2 T_0}{\rho c_1^2 K}.\end{gathered} \tag{37}$$

При этом безразмерные определяющие уравнения (24)–(28) принимают вид

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1^2 & \delta_2 & \beta_1^2\\ \delta_2 & \beta_1^2 & \beta_1^2\\ \delta_2 & \delta_2 & \beta_1^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial u/\partial x\\ \partial v/\partial y\\ \theta\end{bmatrix}, \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xy}\\ \sigma_{yx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \delta_3 & -2\\ \delta_3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial v/\partial x\\ \partial u/\partial y\\ \omega\end{bmatrix}, \tag{39}$$

$$\begin{bmatrix}m_{zx}\\ m_{zy}\end{bmatrix}=\delta_4\begin{bmatrix}\partial\omega/\partial x\\ \partial\omega/\partial y\end{bmatrix}, \tag{40}$$

$$\varphi-\theta=a_1\nabla^2\varphi, \tag{41}$$

где

$$\delta_2=\frac{\lambda}{\alpha+\mu}, \delta_3=\frac{\mu-\alpha}{\alpha+\mu}, \delta_4=\frac{\upsilon-\beta}{\upsilon+\beta}, a_1=\frac{c_1^2}{\eta^2}a. \tag{42}$$

Ввиду большого количества дифференциальных уравнений, помимо переменных поля, введем потенциальные функции $\Phi(x,y,t)$ и $\mathbf{\Psi}(x,y,t)$, которые определяются соотношениями

$$\mathbf{u}=\nabla\Phi+\nabla\times\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Psi}=(0,0,\Psi). \tag{43}$$

На основе полученных уравнений выразим компоненты смещений $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$:

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \tag{44}$$

$$v=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{45}$$

Подставляя (44) и (45) в (33)–(36), получим:

$$\nabla^2\left(\beta_1^2\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)-\beta_1^2\frac{\partial\theta}{\partial x}+2\frac{\partial\omega}{\partial y}=\beta_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Pi^2\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right), \tag{46}$$

$$\nabla^2\left(\beta_1^2\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)-\beta_1^2\frac{\partial\theta}{\partial y}-2\frac{\partial\omega}{\partial x}=\beta_1^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Pi^2\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right), \tag{47}$$

$$\left(\nabla^2-g_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}-g_2\right)\omega=g_1\nabla^2\Psi, \tag{48}$$

$$\left(1+\sum_{r=1}^{n}\frac{\tau_\varphi^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right)\nabla^2\varphi=\left(1+\sum_{r=1}^{m}\frac{\tau_q^r}{r!}\frac{\partial^r}{\partial t^r}\right)\times\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+g\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\Phi\right). \tag{49}$$

Упростим уравнения (46), (47):

$$\left(\nabla^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Pi^2\right)\Phi=\theta, \tag{50}$$

$$\left(\nabla^2-\beta_2^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\beta_1^2\Pi^2\right)\Psi=-2\omega. \tag{51}$$

5. Решение для собственных мод

Для решения уравнений (46)–(51) примем, что

$$(\theta,\varphi,u,v,\sigma_{ij},\Phi,m_{ij},\Psi,\omega)=(\overline{\theta},\overline{\varphi},\overline{u},\overline{v},\overline{\sigma}_{ij},\overline{\Phi},\overline{m}_{ij},\overline{\Psi},\overline{\omega})(y)\exp(i\zeta x+\Omega t), \tag{52}$$

где Ω — комплексная постоянная угловая частота; ζ — волновое число вдоль оси x. Переменные $\overline{\theta},\overline{\varphi},\overline{u},\overline{v},\overline{\sigma}_{ij},\overline{\Phi},\overline{\Psi}$ и $\overline{\omega}$ являются неопределенными амплитудными функциями только по переменной y и не зависят от времени t и координаты x.

Подставляя (52) в (46)–(51), получим следующие уравнения:

$$(D^2-\varepsilon_1)\overline{\Phi}=\overline{\theta}, \tag{53}$$

$$(D^2-\zeta^2)\overline{\varphi}=\varepsilon_4(\overline{\theta}+g(D^2-\zeta^2)\overline{\Phi}), \tag{54}$$

$$\overline{\varphi}-\overline{\theta}=a_1(D^2-\zeta^2)\overline{\varphi}, \tag{55}$$

$$(D^2-\varepsilon_2)\overline{\Psi}=-2\overline{\omega}, \tag{56}$$

$$(D^2-\varepsilon_3)\overline{\omega}=g_1(D^2-\zeta^2)\overline{\Psi}, \tag{57}$$

где

$$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}, \varepsilon_1=\zeta^2+\Omega^2-\Pi^2,$$
$$\varepsilon_2=\zeta^2+\beta_2^2\Omega^2-\beta_1^2\Pi^2,$$
$$\varepsilon_3=\zeta^2+g_2+g_3\Omega^2, \varepsilon_4=\frac{\Omega L_q}{L_\varphi}, \tag{58}$$
$$L_q=1+\sum_{r=1}^{m}\frac{\Omega^r\tau_q^r}{r!}, L_\varphi=1+\sum_{r=1}^{n}\frac{\Omega^r\tau_\varphi^r}{r!}.$$

Исключая $\overline{\theta},\overline{\varphi},\overline{\Phi}$ из (53)–(55) и $\overline{\omega},\overline{\Psi}$ из (56) и (57), получим:

$$(D^4-\eta_1D^2+\gamma_1)\{\overline{\theta},\overline{\varphi},\overline{\Phi}\}(y)=0, \tag{59}$$

$$(D^4-\eta_2D^2+\gamma_2)\{\overline{\omega},\overline{\Psi}\}(y)=0, \tag{60}$$

где

$$\eta_1=\frac{\zeta^2+\varepsilon_1+\varepsilon_4[a_1(\varepsilon_2+g\zeta^2)+(a_1\zeta^2+1)(g+1)]}{a_1\varepsilon_4(g+1)+1},$$
$$\eta_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3-g_1,$$
$$\gamma_1=\frac{\zeta^2+\varepsilon_1+\varepsilon_4(a_1\zeta^2+1)(\varepsilon_1+g\zeta^2)}{a_1\varepsilon_4(g+1)+1}, \tag{61}$$
$$\gamma_2=\varepsilon_2\varepsilon_3-2g_1\zeta^2.$$

Решения уравнений (59), (60) удовлетворяют критериям непротиворечивости, при которых функции $\overline{\theta}, \overline{\varphi}, \overline{u}, \overline{v}, \overline{\sigma}_{ij}, \overline{\Phi}, \overline{\Psi}$ и $\overline{\omega}$ стремятся к нулю при стремлении y к бесконечности, а выражения для них записываются в виде

$$\overline{\Phi}(y) = \sum_{j=1}^{2} A_j e^{-\lambda_j y}, \tag{62}$$

$$\overline{\Psi}(y) = \sum_{j=1}^{2} B_j e^{-\mu_j y}, \tag{63}$$

$$\overline{\theta}(y) = \sum_{j=1}^{2} A'_j e^{-\lambda_j y}, \tag{64}$$

$$\overline{\varphi}(y) = \sum_{j=1}^{2} A''_j e^{-\lambda_j y}, \tag{65}$$

$$\overline{\omega}(y) = \sum_{j=1}^{2} B'_j e^{-\mu_j y}, \tag{66}$$

где A_j, A'_j, A''_j, B_j и B'_j ($i = 1, 2, 3$) — параметры, зависящие от ζ и Ω. Кроме того, параметры λ_j, μ_j ($i = 1, 2$) являются положительными корнями следующих уравнений:

$$\lambda^4 - \eta_1 \lambda^2 + \gamma_1 = 0, \tag{67}$$

$$\mu^4 - \eta_2 \mu^2 + \gamma_2 = 0. \tag{68}$$

Подставляя (62)–(66) в (53)–(57), имеем:

$$A'_j = (\lambda_j^2 - \varepsilon_1) A_j,\ A''_j = \frac{\lambda_j^2 - \varepsilon_1}{1 - a_1(\lambda_j^2 - \zeta^2)} A_j,$$
$$B'_j = -\frac{1}{2}(\mu_j^2 - \varepsilon_2) B_j,\ j = 1, 2. \tag{69}$$

Подставляя (69) в (64)–(66), получим:

$$\overline{\theta} = \sum_{j=1}^{2} (\lambda_j^2 - \varepsilon_1) A_j e^{-\lambda_j y}, \tag{70}$$

$$\overline{\varphi} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\lambda_j^2 - \varepsilon_1}{1 - a_1(\lambda_j^2 - \zeta^2)} A_j e^{-\lambda_j y}, \tag{71}$$

$$\overline{\omega} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} (\mu_j^2 - \varepsilon_2) B_j e^{-\mu_j y}. \tag{72}$$

Для определения компонент смещения $\overline{u}$ и $\overline{v}$ подставим (52) в (44), (45), а затем на основе уравнений (62) и (63) получим:

$$\overline{u} = i\zeta \sum_{j=1}^{2} \lambda_j A_j e^{-\lambda_j y} - \sum_{j=1}^{2} \lambda_j B_j e^{-\mu_j y}, \tag{73}$$

$$\overline{v} = -\sum_{j=1}^{2} \lambda_j A_j e^{-\lambda_j y} - i\zeta \sum_{j=1}^{2} \lambda_j B_j e^{-\mu_j y}. \tag{74}$$

Используя метод решения для собственных мод, запишем выражения для компонент тепловых и моментных напряжений $\overline{\sigma}_{ij}$ и $\overline{m}_{ij}$:

$$\overline{\sigma}_{xx} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{1j} A_j e^{-\lambda_j y} + \sum_{j=1}^{2} \beta_{1j} B_j e^{-\mu_j y}, \tag{75}$$

$$\overline{\sigma}_{yy} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{2j} A_j e^{-\lambda_j y} + \sum_{j=1}^{2} \beta_{2j} B_j e^{-\mu_j y}, \tag{76}$$

$$\overline{\sigma}_{zz} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{3j} A_j e^{-\lambda_j y} + \sum_{j=1}^{2} \beta_{3j} B_j e^{-\mu_j y}, \tag{77}$$

$$\overline{\sigma}_{xy} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{4j} A_j e^{-\lambda_j y} + \sum_{j=1}^{2} \beta_{4j} B_j e^{-\mu_j y}, \tag{78}$$

$$\overline{\sigma}_{yx} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{5j} A_j e^{-\lambda_j y} + \sum_{j=1}^{2} \beta_{5j} B_j e^{-\mu_j y}, \tag{79}$$

$$\overline{m}_{xz} = -\frac{i\zeta}{2} \sum_{j=1}^{2} (\mu_j^2 - \varepsilon_2) B_j e^{-\mu_j y}, \tag{80}$$

$$\overline{m}_{yz} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \mu_j (\mu_j^2 - \varepsilon_2) B_j e^{-\mu_j y}, \tag{81}$$

где

$$\alpha_{1j} = (\delta_2 - \beta_1^2)\lambda_j^2 + \beta_1^2 \varepsilon_1 - \zeta^2 \beta_1^2,$$
$$\beta_{1j} = i\zeta \mu_j (\delta_2 - \delta_1),$$
$$\alpha_{2j} = \beta_1^2 \varepsilon_1 - \zeta^2 \delta_2,\ \beta_{2j} = i\zeta \mu_j (\beta_1^2 - \delta_2),$$
$$\alpha_{3j} = -\beta_1^2 (\lambda_j^2 - \varepsilon_1) - \zeta^2 \delta_2,\ \beta_{3j} = -i\zeta \mu_j \delta_2,$$
$$\alpha_{4j} = -2i\zeta \lambda_j,\ \beta_{4j} = \zeta^2 - \varepsilon_2 + \mu_j^2 (1 + \delta_3),$$
$$\alpha_{5j} = -i\zeta \lambda_j (1 + \delta_3),\ \beta_{5j} = \delta_3 \zeta^2 + \varepsilon_2. \tag{82}$$

Используя уравнение (52), сформулируем граничные условия (29)–(31):

$$\overline{\sigma}_{yy}(x, y, t) = 0,\ \overline{\sigma}_{xy}(x, y, t) = 0,$$
$$\overline{m}_{yz}(x, y, t) = 0 \text{ at } y = 0, \tag{83}$$

$$\overline{\varphi}(x, y, t) = \varphi_0 \exp(-[i\zeta x + (\Omega + b)t])$$
$$= \overline{f}(t, \zeta, \Omega) \text{ at } y = 0. \tag{84}$$

Использование граничных условий (83), (84) приводит к

$$\sum_{j=1}^{2} \alpha_{2j} A_j + \sum_{j=1}^{2} \beta_{2j} B_j = 0, \tag{85}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \alpha_{4j} A_j + \sum_{j=1}^{2} \beta_{4j} B_j = 0, \tag{86}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \mu_j (\mu_j^2 - \varepsilon_2) B_j = 0, \tag{87}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\lambda_j^2 - \varepsilon_1}{1 - a_1(\lambda_j^2 - \zeta^2)} A_j = \overline{f}(t, \zeta, \Omega), \tag{88}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \alpha_{yj} A_j + \sum_{j=1}^{2} \beta_{yj} A_j^3 = 0, \tag{89}$$

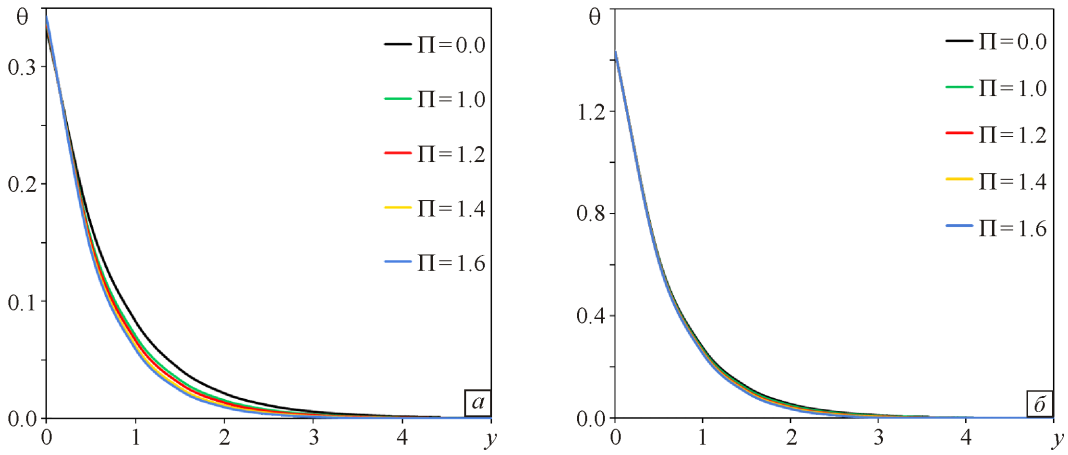


Рис. 1. Изменение динамической температуры θ (*а*) и температуры проводимости φ (*б*) для различных значений параметра скорости вращения П (цветной в онлайн-версии)

$$\sum_{j=1}^{2}\alpha_{yxj}A_j+\sum_{j=1}^{2}\beta_{yxj}A_j^3=0, \tag{90}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}E_jA_j^3=0, \tag{91}$$

$$\sum_{j=1}^{2}E_jA_j=\overline{f}, \tag{92}$$

$$E_j=\lambda_j(\lambda_j^2-\varepsilon_2),\ j=3,4,$$
$$E_j=\frac{\lambda_j^2-\varepsilon_1}{1-a_1(\lambda_j^2-\zeta^2)},\ j=1,2. \tag{93}$$

Решив приведенную выше систему уравнений, зададим константы A_j, B_j ($j=1,2$) и получим выражения для различных физических полей.

6. Численные результаты и обсуждение

В разделе обсуждаются результаты численного моделирования физических полей и используемая математическая модель. Для удобства сравнения исследование проведено для кристаллического магния. В расчетах использовались стандартная температура $T_0=298$ K и следующие значения физических параметров [54]:

$$\lambda=9.4\cdot10^{10}\ \text{Н/м}^2,\ \mu=4.5\cdot10^{10}\ \text{Н/м}^2,$$
$$\alpha=0.5\cdot10^{10}\ \text{Н/м}^2,\ \upsilon+\beta=0.779\cdot10^{-5}\ \text{Н/м}^2,$$
$$K=1.7\cdot10^{2}\ \text{Дж/(мс}\cdot\text{К)},\ C_E=1.04\cdot10^{3}\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)},$$
$$\rho=1.74\cdot10^{3}\ \text{кг/м}^3,\ j=0.2\cdot10^{-19}\ \text{м}^2,$$
$$\gamma=0.779\cdot10^{-9}\ \text{Н}.$$

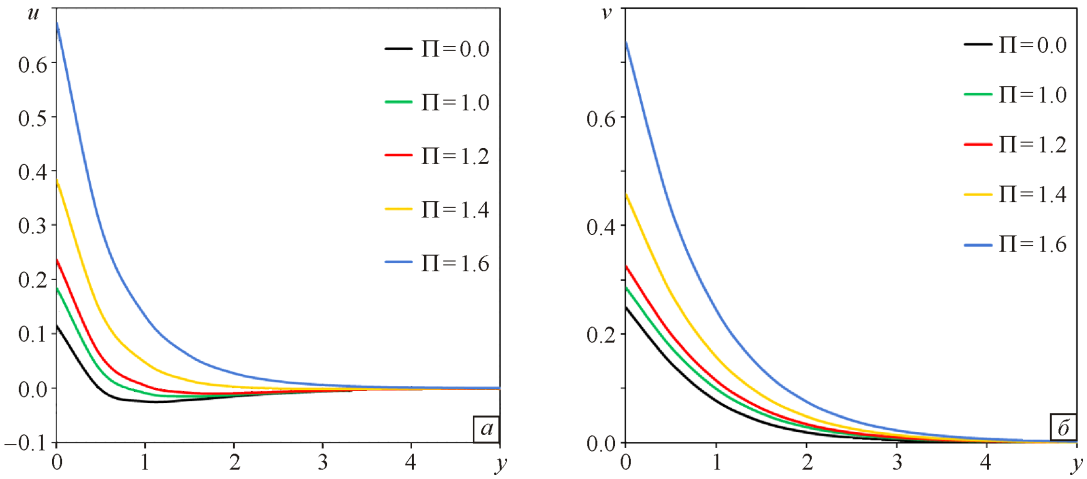


Рис. 2. Изменение нормальных перемещений u (*а*) и касательных перемещений v (*б*) для различных значений параметра скорости вращения П (цветной в онлайн-версии)

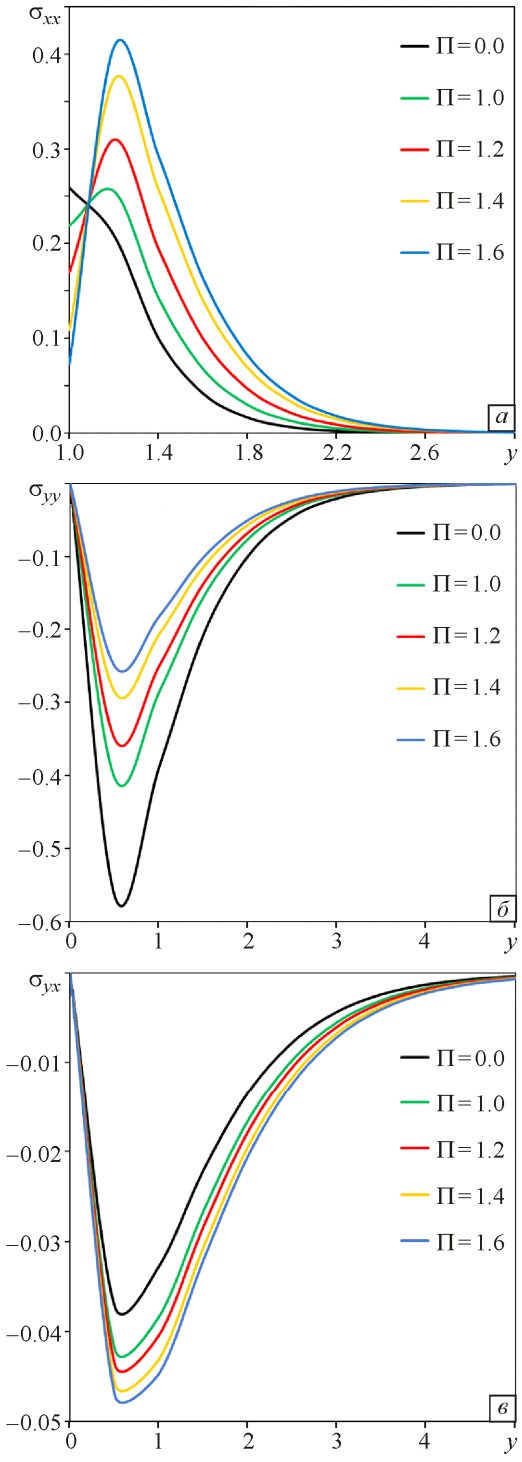


Рис. 3. Изменение нормальных напряжений σ_{xx} (*а*), σ_{yy} (*б*) и касательных напряжений σ_{yx} (*в*) для различных значений параметра скорости вращения П (цветной в онлайн-версии)

Примем, что Ω является действительной величиной ($\Omega = 2$) при малых временах. Остальные константы в численных расчетах имеют следующие значения [56]: $\zeta = 2$, $L = 2$, $a_1 = 0.2$, $\varphi_0 = 1$, $b = 1$. Расчеты выполняются для безразмерного времени $t = 0.2$ по поверхности $x = 0.1$ на интервале $0 \le y \le 3$, при этом действительная составляющая амплитуды переменных поля отложена по вертикальной оси. Распределения температуры проводимости и динамической температуры (φ, θ), термических напряжений (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{yx}), компонент вектора перемещений (*u*, *v*), микроповорота ω и компонент моментных напряжений m_{yz} вдоль оси *y* представлены в графическом виде при различных эффективных параметрах, таких как коэффициент a_1, параметр поворота, а также производные высшего порядка по времени *m* и *n*. Также проведено сравнение различных моделей с учетом и без учета микрополярных эффектов.

Из рисунков видно, что двухтемпературный коэффициент a_1 и высшие производные по времени *m*, *n* оказывают существенное влияние на все исследуемые поля. В зависимости от значений производных высшего порядка по времени и коэффициента расхождения a_1, тепловые и механические волны могут достигать устойчивого состояния. Учет влияния этих параметров позволяет разграничить вклад термодинамической температуры и температуры проводимости.

6.1. Влияние вращения на распределение параметров

Рассмотрим изменение безразмерной температуры проводимости φ и динамической температуры θ, термических напряжений σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{yx}, компонент вектора перемещения *u*, *v*, микроповорота ω и компонент моментных напряжений m_{yz} вдоль оси *y* при различных значениях параметра вращения П. Для вращающейся среды задаются значения П = 1, 1.2, 1.4 и 1.6. В случае отсутствия вращения П = 0. На рис. 1–4 показаны результаты расчетов влияния поворота на различные переменные теплофизического поля, полученные с использованием двухтемпературной микрополярной модели термоупругости с двухфазным запаздыванием и высшими производными по времени (2MHDPL).

На рис. 1 представлены зависимости температуры проводимости φ и динамической температуры θ для заданных значений параметра вращения П. Из рисунков видно, что параметр вращения влияет на распределение температур. Так, значения динамической температуры θ при вращении меньше, чем при отсутствии вращения. Также наблюдается слабое влияние параметра П на температуру проводимости φ. Можно сделать вывод,

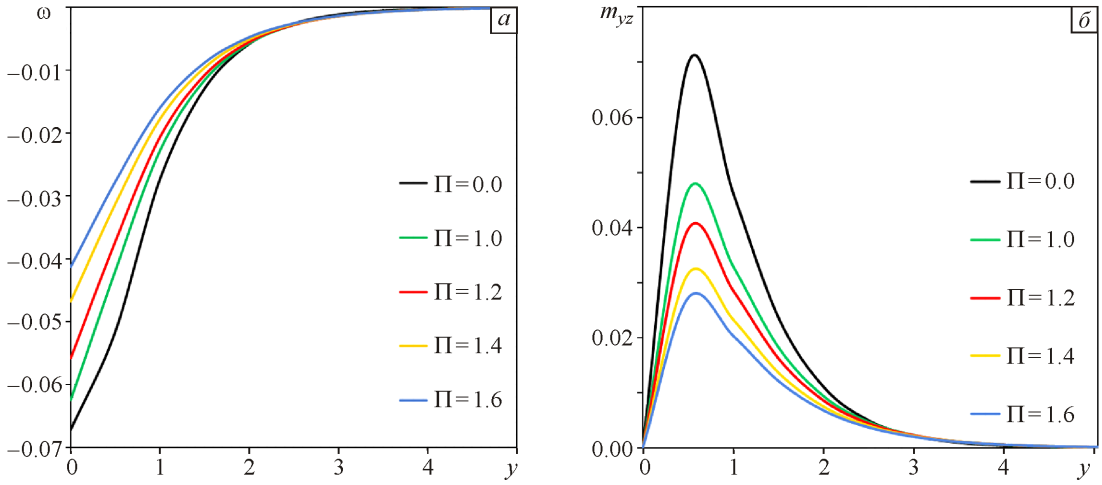


Рис. 4. Изменение микроповорота ω (*а*) и моментных напряжений m_{yx} (*б*) для различных значений параметра скорости вращения П (цветной в онлайн-версии)

что обе температуры φ и θ уменьшаются с увеличением расстояния по оси y при любых П и температура проводимости φ удовлетворяет граничным условиям. Другим важным выводом является то, что тепловая волна имеет ограниченную скорость распространения в среде, и в этом предложенная модель 2MHDPL согласуется с обобщенной теорией термоупругости.

Изменение компонент перемещения u и v вдоль оси y показано на рис. 2 для различных значений параметра вращения П. Видно, что смещения уменьшаются с увеличением расстояния y. Кроме того, значения тепловых смещений больше при более высоких значениях параметра П. Из рисунков следует, что деформация среды зависит не только от типа граничных условий задачи, но и от скорости вращения среды.

На рис. 3, *а* представлены кривые нормальных напряжений σ_{xx} для заданных значений параметра вращения П. Из рисунка видно, что в зависимости от угловой скорости П напряжения σ_{xx} на поверхности имеют разные начальные значения, которые быстро увеличиваются, пока не достигнут максимальных значений в точке $y = 1.2$. При дальнейшем увеличении расстояния y кривые напряжения постепенно снижаются и покидают область термической турбулентности. Это указывает на то, что учет вращения в основных уравнениях критически влияет на распределение термических напряжений σ_{xx}. С ростом скорости вращения П вблизи поверхности $y = 0$ (в диапазоне $0 \le y \le 1.2$) напряжения падают, а затем возрастают при y больше 1.2.

На рис. 3, *б*, *в* показано влияние параметра вращения П на изменение термических напряжений σ_{yy} и σ_{yx} соответственно. Напряжения имеют нулевые значения в точке $y = 0$, что удовлетворяет граничным условиям задачи. Кривые напряжений демонстрируют схожее поведение: выходя из начала координат, они быстро убывают до минимальных значений, а затем снова постепенно возрастают до нулевых значений по мере удаления от поверхности. Выявлено, что с ростом скорости вращения упругого тела амплитуда нормальных напряжений σ_{yy} уменьшается, а амплитуда касательных напряжений σ_{yx} увеличивается.

На рис. 4, *а* показано изменение значения микроповорота ω вдоль оси y в зависимости от угловой скорости П. Во всех случаях микроповорот ω имеет отрицательные значения на поверхности, а затем постепенно увеличивается до нулевых значений по мере удаления от поверхности. Параметр вращения оказыват заметное влияние на микроповорот ω, который уменьшается с увеличением угловой скорости П.

На рис. 4, *б* построены кривые моментных напряжений m_{yz} при разных значениях скорости вращения П. Поведение кривых на диаграмме одинаково. В соответствии с граничными условиями задачи на поверхности $y = 0$ моментные напряжения m_{yz} равны нулю. Затем они постепенно увеличиваются до максимальных значений при $y = 1.2$ и постепенно снижаются до нулевых значений по мере удаления от источника тепла и переходной зоны. Кроме того, угловая скорость вращения оказывает существенное влияние на распределение моментных напряжений m_{yz}, что выражается в снижении пиковых значений с увеличением параметра П.

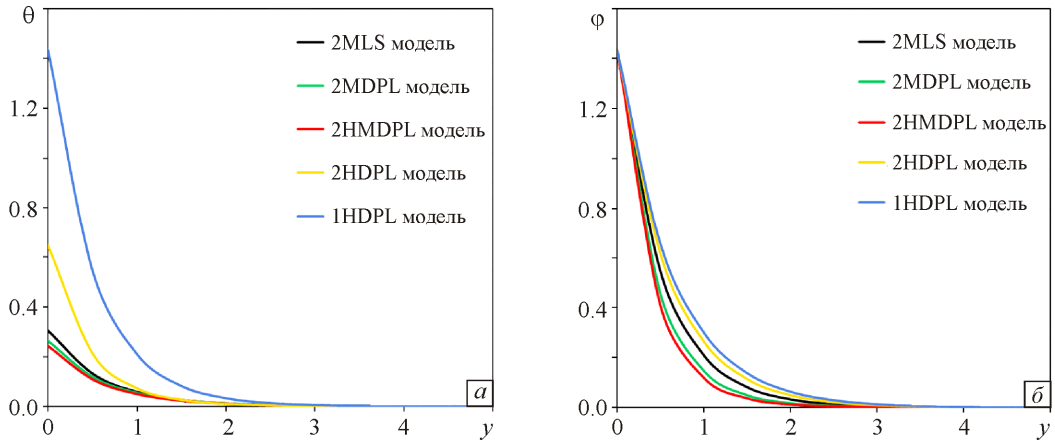


Рис. 5. Распределение динамической температуры θ (*а*) и температуры проводимости φ (*б*) в различных моделях термоупругости (цветной в онлайн-версии)

6.2. Сравнение различных микрополярных моделей термоупругости

Рассмотрим изменение значений переменных поля с расстоянием y, расчитанных с помощью двухтемпературной микрополярной модели термоупругости с одним временем релаксации (2MLS), двухтемпературной микрополярной модели термоупругости с двухфазным запаздыванием (2MDPL), а также одно- и двухтемпературных термоупругих моделей с двухфазным запаздыванием и высшими производными по времени (2MHDPL, 2HDPL, 1HDPL). Отметим, что построение двухтемпературных моделей термоупругости возможно только без учета влияния микрополярности: $\alpha=\beta=\upsilon=\varepsilon=j=0$. Для однотемпературных моделей $a_1=0$.

На рис. 5, *а* показано влияние микрополярности, высших производных по времени m, n и коэффициента a_1 на изменение температуры вдоль оси y. Видно, что в направлении распространения волны вдоль оси y динамическая температура постепенно снижается. Кроме того, в рассматриваемых моделях температура быстро достигает максимальных значений («пиковая температура») в результате уменьшения тепловой нагрузки. Затем в пределах определенной области температура постепенно уменьшается до нулевых значений. Приведенные данные подтверждают, что в моделях без учета микрополярности значения температуры намного выше, чем в микрополярных моделях. Сравнение результатов, полученных с помощью моделей 2MHDPL и 2MDPL, показывает,

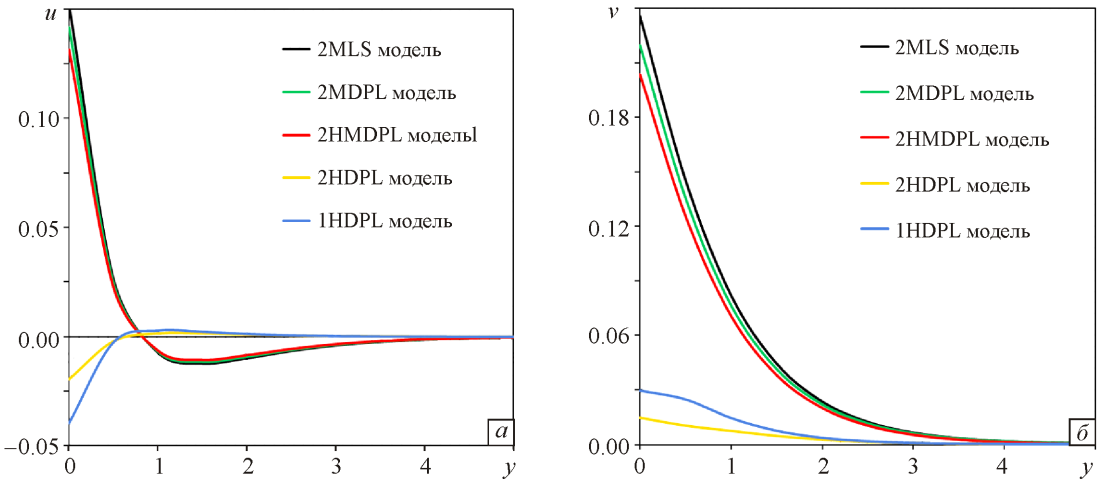


Рис. 6. Распределение нормальных перемещений u (*а*) и касательных перемещений v (*б*) в различных моделях термоупругости (цветной в онлайн-версии)

что наличие высших производных m и n приводит к ограничению распространения тепла в среде.

Другим важным наблюдением является влияние двухтемпературного параметра a_1 на распределение температуры. Температурная кривая в модели 2HDPL оказалась намного ниже температурной кривой в модели 1HDPL.

Как показано на рис. 5, *б*, все случаи с постоянным значением температуры проводимости φ на свободной поверхности среды находятся в полном соответствии с тепловыми граничными условиями. В обобщенной модели начальная температура проводимости имеет самое высокое значение (за счет диффузии тепловой границы) и постепенно снижается в направлении тепловой волны практически до нуля. По сравнению с двухтемпературными моделями температура проводимости φ в модели 1HDP без коэффициента расхождения a_1 имеет меньшие значения. На рисунке наблюдается расхождение кривых, построенных по моделям с учетом и без учета микрополярности. Кроме того, производные высшего порядка m и n существенно снижают температуру теплопроводности.

На рис. 6 показано распределение нормальных и поперечных перемещений u и v, рассчитанных в рамках различных теорий термоупругости. Согласно полученным результатам, наличие или отсутствие двухтемпературного параметра a_1 оказывает сильное влияние на распределение перемещений. Производные высшего порядка по времени m и n также оказывают заметное влияние на распределение полей перемещений u и v. Кривые смещений имеют одинаковый характер в трех микрополярных моделях (2MLS, 2MDPL, 2MHDPL) и существенно отличаются от кривых в двух других моделях без учета микрополярного эффекта (2HDPL, 1HDPL).

Изменение нормальных и касательных напряжений σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{yx} проиллюстрировано на рис. 7 в зависимости от двухтемпературного параметра a_1 и производных высшего порядка m и n для моделей с учетом и без учета микрополярности. Из рисунков видно, что двухтемпературный параметр a_1 оказывает существенное влияние на все переменные поля. Влияние параметра a_1 и производных высшего порядка m, n заключается в снижении уровня нормальных и касательных напряжений. В зависимости от значений разности температур, а также высших производных, волны приближаются к стационарному состоянию.

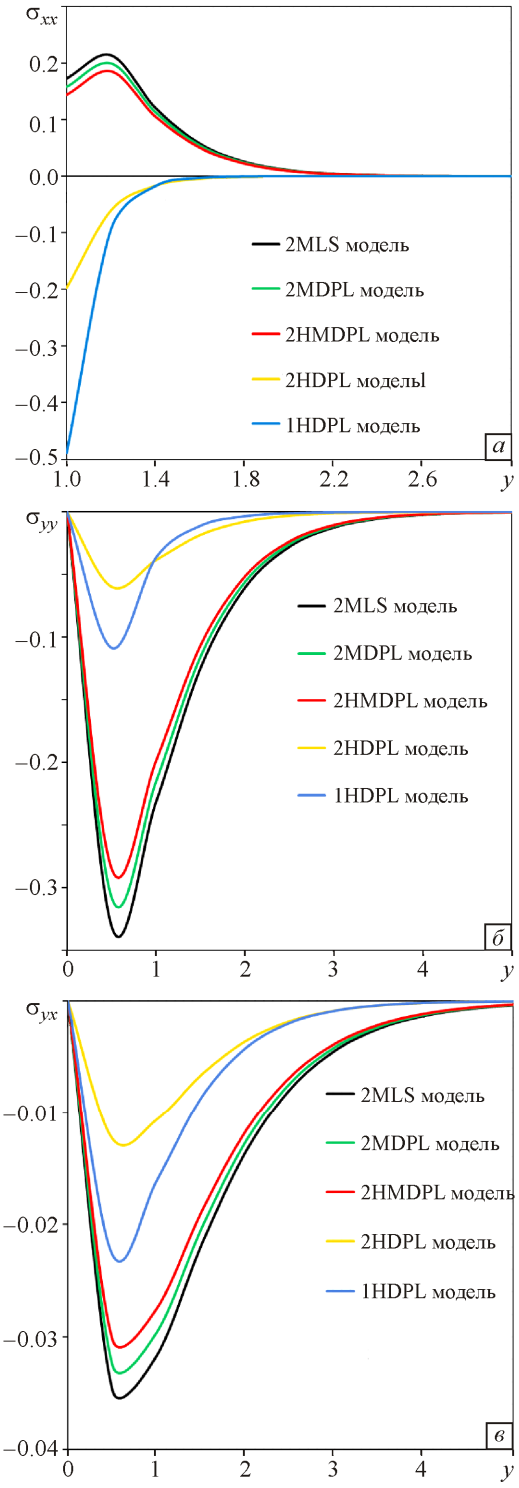


Рис. 7. Распределение нормальных напряжений σ_{xx} (*а*), σ_{yy} (*б*) и касательных напряжений σ_{yx} (*в*) в различных моделях термоупругости (цветной в онлайн-версии)

Кривые на рис. 7, *а*, построеные по моделям с учетом и без учета микрополярности, указывают на заметное влияние выбора модели на распределение нормального напряжения σ_{xx}. Из рис. 7, *б*, *в*

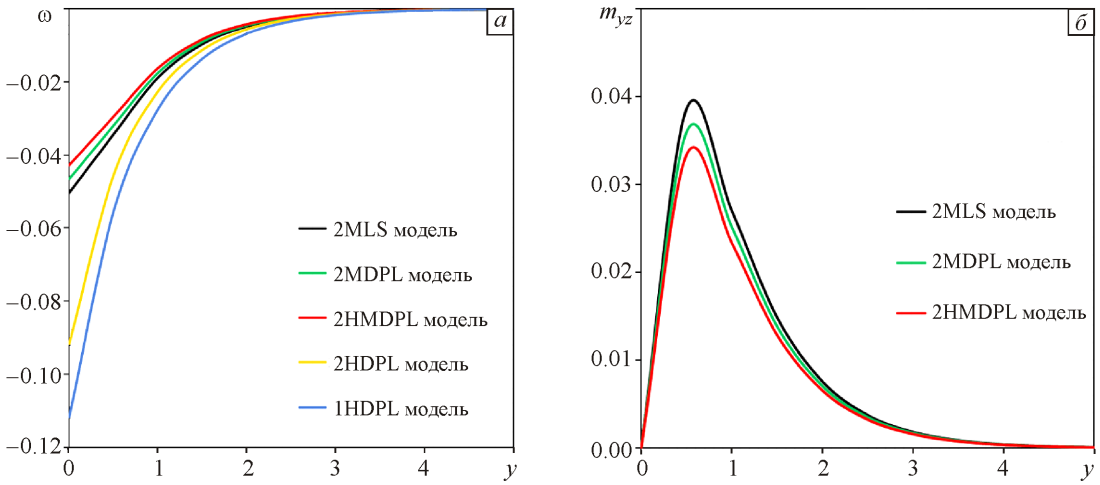


Рис. 8. Распределение микроповорота ω (*а*) и моментных напряжений m_{yz} (*б*) в различных моделях термоупругости (цветной в онлайн-версии)

видно, что абсолютные значения напряжения σ_{yy} в микрополярных теориях (2MLS, 2MDPL, 2MHDPL) намного меньше значений в моделях 2HDPL и 1HDPL, не учитывающих микрополярные эффекты. По кривым, представленым на рис. 7, *б*, *в* для разных теорий, можно сделать вывод, что напряжения σ_{yy} и σ_{yx} удовлетворяют механическим граничным условиям на свободной поверхности среды.

На рис. 8 показано изменение микроповорота ω и касательных моментных напряжений m_{yz} для трех микрополярных теорий (2MLS, 2MDPL, 2MHDPL) и двух теорий без учета микрополярного эффекта (2HDPL, 1HDPL). Наличие безразмерного коэффициента расхождения a_1, а также производных высшего порядка по времени m и n оказывает существенное влияние на поведение кривых.

Из рис. 8 видно, что микрополярные модели (2MLS, 2MDPL, 2MHDPL) дают более высокие абсолютные значения микроповорота ω по сравнению с моделями 2HDPL и 1HDPL и наблюдается сильное расхождение решений для микрополярных моделей с решениями для моделей 2HDPL и 1HDPL. Кроме того, все кривые моментных напряжений исходят из начала координат, что удовлетворяет граничным условиям и подтверждает точность расчетов.

7. Заключение

В работе представлена двухтемпературная термоупругая модель, разработанная в рамках обобщенной микрополярной теории термоупругости. Первая температура обусловлена механическим процессом (динамическая температура), а вторая является следствием теплового процесса (температура проводимости). Уравнение теплопроводности включает частные производные высшего порядка. Отсутствие учета коэффициента расхождения позволяет получить различные теории, являющиеся частными случаями предлагаемой модели. Методом анализа собственных мод изучено поведение термических напряжений, температур, перемещений и микроповорота для однородного изотопного вращающегося микрополярного термоупругого материала.

Результаты показали, что угловая скорость и коэффициент расхождения оказывают существенное влияние на термоупругое поведение упругой среды, а также на распределение перемещений и напряжений.

Результаты двухтемпературных теорий термоупругости существенно отличаются от результатов однотемпературных моделей. Интенсивность тепловых и механических волн уменьшается при учете коэффициента расхождения. Поэтому с практической точки зрения двухтемпературные микрополярные теории больше подходят для изучения упругих тел, чем обобщенные однотемпературные модели термоупругости. В связи с этим существует необходимость различать вклад волн проводимости и термодинамических тепловых волн.

Частные производные высшего порядка оказывают значительное влияние на распределение переменных поля. Используя данные производные, можно ограничить распространение тепловых и механических волн. Таким образом, модифицированная модель с фазовым запаздыванием и производными высшего порядка является более эффек-

тивной по сравнению с предыдущими обобщенными теориями и лучше подходит для изучения распространиения тепловых волн.

Учет микрополярности оказывает существенное влияние на теплофизические поля, приводя к уменьшению их значений, за исключением поперечного напряжения и температуры проводимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Университета Джуфа в рамках гранта № DSR-2021-03-0383. Авторы выражают благодарность Колледжу науки и искусств в Аль-Курайяте за техническую поддержку.

Литература

1. *Subba Rao V., Nigam S.D.* Wave propagation in rotating elastic media // Mathematica. – 1964. – P. 29–38.
2. *Durukan Y., Shevelko M., Peregudov A., Popkova E., Shevchenko S.* The effect of a rotating medium on bulk acoustic wave polarization: From theoretical considerations to perspective angular motion sensor design // Sensors. – 2020. – V. 20(9). – P. 2487.
3. *Khan A., Islam S., Khan M.* Rayleigh waves in a rotating orthotropic medium // World Appl. Sci. J. – 2012. – V. 16(1). – P. 73–75.
4. *Jafari S.* Elastic limit angular velocity and acceleration investigation in non-uniform rotating disk under time-dependent mechanical loading // J. Appl. Comput. Mech. – 2022. – V. 8(3). – P. 791–808. – https://doi.org/10.22055/jacm.2020.32914.2099
5. *Abouelregal A.E., Atta D., Sedighi H.M.* Vibrational behavior of thermoelastic rotating nanobeams with variable thermal properties based on memory-dependent derivative of heat conduction model // Arch. Appl. Mech. – 2022. – https://doi.org/10.1007/s00419-022-02110-8
6. *Sladek J., Sladek V., Repka M.* The heat conduction in nanosized structures // Phys. Mesomech. – 2021. – V. 24. – No. 5. – P. 611–617. – https://doi.org/10.1134/S102995992105012X
7. *Abouelregal A.E., Sedighi H.M., Malikan M., Eremeyev V.A.* Nonlocalized thermal behavior of rotating micromachined beams under dynamic and thermodynamic loads // ZAMM–J. Appl. Math. Mech. – 2022. – V. 102(4). – P. e202100310.
8. *Abouelregal A.E., Abo-Dahab S.M.* A two-dimensional problem of a mode-I crack in a rotating fibre-reinforced isotropic thermoelastic medium under dual-phase-lag model // Sadhana. – 2018. – V. 43. – P. 13.
9. *Abouelregal A.E., Mohammad-Sedighi H., Faghidian S.A., Shirazi A.H.* Temperature-dependent physical characteristics of the rotating nonlocal nanobeams subject to a varying heat source and a dynamic load // Facta Univ. Ser. Mech. Eng. – 2021. – V. 19(4). – P. 633–656.
10. *Abouelregal A.E., Marin M., Askar S.* Thermo-optical mechanical waves in a rotating solid semiconductor sphere using the improved Green–Naghdi III model // Mathematics. – 2021. – V. 9(22). – P. 2902.
11. *Biot M.* Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // J. Appl. Phys. – 1956. – V. 27. – P. 240–253.
12. *Lord H.W., Shulman Y.H.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. – 1967. – V. 15. – P. 299–309.
13. *Green A.E., Naghdi P.M.* A re-examination of the basic results of thermomechanics // Proc. Math. Phys. Sci. – 1991. – V. 432. – P. 171–194.
14. *Green A.E., Lindsay K.A.* Thermoelasticity // J. Elasticity. – 1972. – V. 2. – P. 1–7.
15. *Green A.E., Naghdi P.M.* On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stress. – 1992. – V. 15. – P. 252–264.
16. *Green A.E., Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. – 1994. – V. 31. – P. 189–208.
17. *Tzou D.Y.* A unified filed approach for heat conduction from macro to macroscales // ASME J. Heat Transfer. – 1995. – V. 117. – P. 8–16.
18. *Tzou D.Y.* The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1995. – V. 38. – P. 3231–3234.
19. *Tzou D.Y.* Experimental support for the lagging behavior in heat propagation // J. Thermophys. Heat Transfer. – 1995. – V. 9. – P. 686–693.
20. *Abouelregal A.E.* Two-temperature thermoelastic model without energy dissipation including higher order time-derivatives and two phase-lags // Mater. Res. Express. – 2019. – V. 6. – P. 116535.
21. *Abouelregal A.E.* On Green and Naghdi thermoelasticity model without energy dissipation with higher order time differential and phase-lags // J. Appl. Comput. Mech. – 2020. – V. 6(3). – P. 445–456.
22. *Abouelregal A.E.* A novel generalized thermoelasticity with higher-order time-derivatives and three-phase lags // Multidiscipl. Model. Mater. Struct. – 2019. – V. 16. – P. 689–711.
23. *Abouelregal A.E.* A novel model of nonlocal thermoelasticity with time derivatives of higher order // Math. Meth. Appl. Sci. – 2020. – V. 43. – P. 6746–6760.
24. *Abouelregal A.E.* Three-phase-lag thermoelastic heat conduction model with higher-order time-fractional derivatives // Indian J. Phys. – 2020. – V. 94. – P. 1949–1963.
25. *Choudhuri S.R.* On a thermoelastic three-phase-lag model // J. Therm. Stress. – 2020. – V. 30. – P. 231–238.
26. *Chen P.J., Gurtin M.E.* On a theory of heat conduction involving two temperatures // Zeitschrift Angewandte Math. Phys. – 1968. – V. 19. – P. 614–627.
27. *Chen P.J., Williams W.O.* A note on non-simple heat conduction // Zeitschrift Angewandte Math. Phys. – 1968. – V. 19. – P. 969–970.
28. *Chen P.J., Gurtin M.E., Williams W.O.* On the thermodynamics of non-simple elastic materials with two temperatures // Zeitschrift Angewandte Math. Phys. – 1969. – V. 20 – P. 107–112.
29. *Quintanilla R.* On existence, structural stability, convergence and spatial behavior in thermoelasticity with two temperatures // Acta Mech. – 2004. – V. 168. – P. 61–73.
30. *Youssef H.* Theory of two-temperature-generalized thermoelasticity // IMA J. Appl. Math. – 2006. – V. 71. – P. 383–390.
31. *Ezzat M.A., El-Karamany A.S.* Two temperature theory in generalized magneto thermoelasticity with two relaxation times // Meccanica. – 2011. – V. 46. – P. 785–794.
32. *Mukhopadhyay S., Prasad R., Kumar R.* On the theory of two-temperature thermoelasticity with two phase-lags // J. Therm. Stress. – 2011. – V. 34. – P. 352–365.

33. *Kumar R., Prasad R., Kumar R*. Thermoelastic interactions on hyperbolic two-temperature generalized thermoelasticity in an infinite medium with a cylindrical cavity // Eur. J. Mech. A. Solids. – 2020. – V. 82. – P. 104007.
34. *Fernández J.R., Quintanilla R*. Uniqueness and exponential instability in a new two-temperature thermoelastic theory // AIMS Mathematics. – 2021. – V. 6(6). – P. 5440–5451.
35. *Sarkar N., Mondal S*. Two-dimensional problem of two-temperature generalized thermoelasticity using memory-dependent heat transfer: An integral transform approach // Indian J. Phys. – 2020. – V. 94(12). – P. 1965–1974.
36. *Hobiny A., Abbas I., Marin M*. The influences of the hyperbolic two-temperatures theory on waves propagation in a semiconductor material containing spherical cavity // Mathematics. – 2022. – V. 10(1). – P. 121.
37. *Hassanpour S., Heppler G.R*. Micropolar elasticity theory: A survey of linear isotropic equations, representative notations, and experimental investigations // Math. Mech. Solids. – 2017. – V. 22(2). – P. 224–242.
38. *Eringen A.C*. Linear theory of micropolar elasticity // J. Appl. Math. Mech. – 1966. – V. 15. – P. 909–923.
39. *Nowacki W*. Theory of Asymmetric Elasticity. – Oxford: Pergamon, 2004.
40. *Eringen A.C.* Foundations of Micropolar Thermoelasticity, International Centre for Mechanical Science, Udine Course and Lectures 23. – Berlin: Springer-Verlag, 1970.
41. *Tauchert T.R., Claus W.D., Jr., Ariman T.* The linear theory of micropolar thermoelasticity // Int. J. Eng. Sci. – 1968. – V. 6. – P. 37–47.
42. *Dost S., Tabarrok B*. Generalized micropolar thermoelasticity // Int. J. Eng. Sci. – 1978. – V. 16. – P. 173.
43. *Chandrasekhariah*. Heat flux dependent micropolar elasticity // Int. J. Eng. Sci. – 1986. – V. 24. – P. 1389–1395.
44. *El-Karamany A.S., Ezzat M.A*. On the three-phase-lag linear micropolar thermoelasticity theory // Eur. J. Mech. A. Solids. – 2013. – V. 40. – P. 198–208.
45. *Alharbi A.M., Said S.M., Abd-Elaziz E.M., Othman M.I.A*. Mathematical model for a magneto-thermoelastic micropolar medium with temperature-dependent material moduli under the effect of mechanical strip load // Acta Mech. – 2021. – V. 232(6). – P. 2331–2346.
46. *Chirilă A., Agarwal R.P., Marin M*. Proving uniqueness for the solution of the problem of homogeneous and anisotropic micropolar thermoelasticity // Bound. Value Probl. – 2017. – V. 3. – P. 2017.
47. *Sharma H., Kumari S., Kumar A*. Study of micropolar thermo-elasticity // Adv. Appl. Math. Sci. – 2020. – V. 19. – P. 929–941.
48. *Hilal M.I.M., Abd-Elaziz E.M., Hanoura S.A*. Reflection of plane waves in magneto-micropolar thermoelastic medium with voids and one relaxation time due to gravity and two-temperature theory // Indian J. Phys. – 2021. – V. 95. – P. 915–924.
49. *Kumar R., Prasad R., Kumar R*. Thermoelastic interactions on hyperbolic two-temperature generalized thermoelasticity in an infinite medium with a cylindrical cavity // Eur. J. Mech. A. Solids. – 2020. – V. 8. – P. 104007.
50. *Lianngenga R., Singh S.S*. Reflection of coupled dilatational and shear waves in the generalized micropolar thermoelastic materials // J. Vibr. Control. – 2020. – V. 26. – P. 1948–1955.
51. *Marin M., Chirila A., Öchsner A., Vlase S*. About finite energy solutions in thermoelasticity of micropolar bodies with voids // Bound. Value Probl. – 2019. – V. 89. – P. 2019.
52. *Abouelregal A.E., Zenkour A.M*. Two-temperature thermoelastic surface waves in micropolar thermoelastic media via dual-phase-lag model // Adv. Aircraft Spacecraft Sci. – 2017. – V. 4. – P. 711–727.
53. *Guesmia A., MuÑoz Rivera J.E., Sepúlveda CortÉs M.A., Vera VillagrÁn O*. Well-posedness and stability of a generalized micropolar thermoelastic body with infinite memory // Quarterly J. Mathematics. – 2021. – V. 72. – P. 1495–1515.
54. *Kumar R., Abbas I.A*. Deformation due to thermal source in micropolar thermoelastic media with thermal and conductive temperatures // J. Comput. Theor. Nanosci. – 2013. – V. 10. – P. 2241–2247.
55. *Shaw S., Mukhopadhyay B*. Moving heat source response in micropolar half-space with two-temperature theory // Continuum Mech. Thermodyn. – 2013. – V. 25. – P. 523–535.
56. *Ezzat M.A., Awad E.S.* Constitutive relations, uniqueness of solution and thermal shock application in the linear theory of micropolar generalized thermoelasticity involving two temperatures // J. Therm. Stress. – 2010. – V. 33. – P. 226–250.
57. *Quintanilla R*. Exponential stability and uniqueness in thermoelasticity with two temperatures // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. A. Math. Anal. – 2004. – V. 11. – P. 57–68.
58. *Quintanilla R*. A well posed problem for the dual-phase-lag heat conduction // J. Therm. Stress. – 2008. – V. 31. – P. 260–269.
59. *Chiriță S*. On the time differential dual-phase-lag thermoelastic model // Meccanica. – 2017. – V. 52. – P. 349–361.
60. *Chiriță S., Ciarletta M., Tibullo V*. On the thermomechanic consistency of the time differential dual-phase-lag models of heat conduction // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2017. – V. 114. – P. 277–285.
61. *Chiriță S., Ciarletta M., Tibullo V*. On the wave propagation in the time differential dual-phase-lag thermoelastic model // Proc. R. Soc. A. – 2015. – V. 471. – P. 20150400.

Поступила в редакцию 03.03.2022 г.,
после доработки 29.05.2022 г.,
принята к публикации 30.05.2022 г.

Сведения об авторах

Ahmed E. Abouelregal, Prof., Jouf University, Saudi Arabia; Mansoura University, Egypt, ahabogal@gmail.com
Rayan Alanazi, Assist. Prof., Jouf University, Saudi Arabia, rmalanazi@ju.edu.sa
Abdullah H. Sofiyev, Prof., Suleyman Demirel University, Istanbul Commerce University, Turkey; Azerbaijan State Economic University, Azerbaijan, abdullahavey@sdu.edu.tr, asofiyev@hotmail.com
Hamid M. Sedighi, Ph.D., Assoc. Prof., Shahid Chamran University of Ahvaz, Iran, h.msedighi@scu.ac.ir, hmsedighi@gmail.com